

11 degree

Task 1.

1. Найдите наименьшее целое t , при котором уравнение $x! + y! + z! = 10t + 43$ имеет хотя бы одно решение (x, y, z) для попарно различных положительных целых x, y, z .

Запись « $n!$ » обозначает факториал натурального n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Answer: 8

2. Найдите наименьшее целое t , при котором уравнение $x! + y! + z! = 10t + 67$ имеет хотя бы одно решение (x, y, z) для попарно различных положительных целых x, y, z .

Запись « $n!$ » обозначает факториал натурального n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Answer: -4

3. Найдите наименьшее целое t , при котором уравнение $x! + y! + z! = 10t - 17$ имеет хотя бы одно решение (x, y, z) для попарно различных положительных целых x, y, z .

Запись « $n!$ » обозначает факториал натурального n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Answer: 14

4. Найдите наименьшее целое t , при котором уравнение $x! + y! + z! = 10t - 33$ имеет хотя бы одно решение (x, y, z) для попарно различных положительных целых x, y, z .

Запись « $n!$ » обозначает факториал натурального n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Answer: 6

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Не ограничивая общности, будем полагать $x > y > z$. Заметим, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ чётно при всех $n \geq 2$, в то время как $10t + 43$ нечётно, поэтому среди чисел $x!, y!, z!$ либо одно, либо три являются нечётными. Все три не могут быть нечётными, поскольку тогда $x = y = z = 1$, что противоречит условию, — значит, $z = 1$, откуда $x! + y! = 10t + 42$.

Заметим, что $10t + 42 \equiv 2 \pmod{10}$. Поскольку $n! \equiv 0 \pmod{10}$ для $n \geq 5$, имеем $y < 5$, далее перебором (сначала для $y < x < 5$, затем для $x = 5$, $y \equiv 2 \pmod{10}$, откуда $y = 2$) находим минимальное $x! + y! \equiv 2 \pmod{10}$ — эта сумма равна $5! + 2! = 122$, откуда $t = 8$.

Task 2.

1. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 16$ и $a \geq 3$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 10

2. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 144$ и $a \geq 5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 26

3. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 48$ и $a \geq 4$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 16

4. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 24$ и $a \geq 5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 14

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть $x = b + c$. Тогда по неравенству о средних $bc \leq \frac{1}{4}x^2$. Значит, $16 = ab + bc + ca = ax + bc \leq ax + \frac{1}{4}x^2$, откуда $x^2 + 4ax - 64 \geq 0$. Рассмотрим это неравенство как квадратное относительно x . Множество его решений – это два луча, один из которых целиком лежит на отрицательной полуоси Ox (поскольку, согласно теореме Виета, произведение корней нашего квадратного трехчлена отрицательно), а потому его можно не рассматривать. По формуле корней квадратного уравнения получаем $x \geq -2a + 2\sqrt{a^2 + 16}$. Учитывая $x = b + c$, имеем $2a + b + c \geq 2\sqrt{a^2 + 16} \geq 2\sqrt{3^2 + 16} = 10$. Равенство достигается при $a = 3, b = c = 2$.

Task 3.

1. Многочлен 23-й степени имеет 23 различных действительных корней. Каково наименьшее возможное количество его ненулевых коэффициентов?

Answer: 12

2. Многочлен 33-й степени имеет 33 различных действительных корней. Каково наименьшее возможное количество его ненулевых коэффициентов?

Answer: 17

3. Многочлен 59-й степени имеет 59 различных действительных корней. Каково наименьшее возможное количество его ненулевых коэффициентов?

Answer: 30

4. Многочлен 47-й степени имеет 47 различных действительных корней. Каково наименьшее возможное количество его ненулевых коэффициентов?

Answer: 24

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{23}$ – корни искомого многочлена $P(x)$ 23-й степени. Корни $P'(x)$ лежат на интервалах $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{22}, x_{23})$, т.е. между корнями исходного – значит, все корни $P'(x)$ также различны. Продолжая, получим, что $P^{(k)}(x)$ (k -я производная $P(x)$; $1 \leq k \leq n$) имеет $23 - k$ различных действительных корней.

Пусть у многочлена $P(x)$ равны нулю коэффициенты при x^{k+1} и при x^k для некоторого $k < 22$, тогда $P^{(k)}(x)$ имеет нулевой коэффициент при x и нулевой свободный член, т.е. имеет корень 0 кратности ≥ 2 , что противоречит вышесказанному – значит, из любых двух подряд идущих коэффициентов многочлена $P(x)$ хотя бы один не равен нулю. Также, согласно условию, не равен нулю его коэффициент при x^{23} . Следовательно, не менее 12 коэффициентов не равны нулю.

Условию удовлетворяет многочлен $P(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3) \cdot \dots \cdot (x^2 - 11)$, имеющий ненулевые коэффициенты только при нечетных степенях x , а таких ровно 12.

Task 4.

1. Сколько существует различных (не равных друг другу) треугольников, вершины каждого из которых совпадают с вершинами некоторого правильного 59-угольника?

Answer: 290

2. Сколько существует различных (не равных друг другу) треугольников, вершины каждого из которых совпадают с вершинами некоторого правильного 47-угольника?

Answer: 184

3. Сколько существует различных (не равных друг другу) треугольников, вершины каждого из которых совпадают с вершинами некоторого правильного 73-угольника?

Answer: 444

4. Сколько существует различных (не равных друг другу) треугольников, вершины каждого из которых совпадают с вершинами некоторого правильного 65-угольника?

Answer: 352

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть всего существует N различных треугольников с вершинами в вершинах правильного 59-угольника, причём из них N_1 правильных, N_2 равнобедренных (но не равносторонних) и N_3 неравнобедренных. Каждый правильный треугольник равен одному треугольнику с фиксированной вершиной A , равнобедренный (но не правильный) – трём треугольникам с вершиной A , а неравнобедренный – шести.

Всего имеется $\frac{1}{2}(59 - 1)(59 - 2) = 1653$ треугольников с вершиной A , откуда $N_1 + 3N_2 + 6N_3 = 1653$. Ясно, что $N_1 = 0$ (т.к. 59 не кратно 3) и $N_2 = \frac{1}{2}(59 - 1) = 29$, откуда

$$0 + 3 \cdot 29 + 6 \cdot N_3 = 1653 \implies N_3 = 261$$

Наконец, $N = N_1 + N_2 + N_3 = 0 + 29 + 261 = 290$.

Task 5. Дано положительное целое k . Аня и Боря играют в игру на клетчатой доске 9×9 , делая ходы по очереди, начиная с Ани. Аня своим ходом ставит 0 в любую пустую клетку доски, а Боря за один свой ход ставит цифру 1 в k пустых клеток. Боря выигрывает, если после очередного его хода все суммы чисел в каждой строке и каждом столбце оказываются нечетными. При каком наименьшем k у Бори есть выигрышная стратегия?

Answer: 3

Решение (RUS). Докажем, что при $k = 3$ Боря выигрывает. Выделим на доске три квадрата 3×3 , идущие по диагонали. Пусть каждым своим ходом Боря ставит единицы ладейной расстановкой в тот квадрат 3×3 , в который пошла Аня (т.е. Боря ставит единицы так, чтобы все единицы стояли бы в разных строках и разных столбцах данного квадрата 3×3). В противном случае Боря ставит единицы в любой квадрат 3×3 , в котором еще нет единиц. Ясно, что Боря выигрывает через три хода (и после первого, и после второго ходов Ани у Бори получится сделать свой ход, поскольку двумя ходами Аня не сможет занять целиком строку или столбец квадрата 3×3).

Докажем, что при $k = 1$ или 2 Боря не может выиграть. Заметим, что перед выигрывающим ходом Бори в точности 8 строк и 8 столбцов имеют нечетные суммы, а одна строка и один столбец – четные. Это означает, что выигрывающий ход Бори строго единственен. Поэтому в свой ход, предшествующий выигрывающему ходу Бори, Аня поставит 0 в нужную для Бори клетку, и тогда Боря не сможет выиграть.

Критерии оценивания:

- показано, что k должно быть нечетным – 1 первичный балл;
- показано, что $k > 2$, дан неверный ответ – 2 первичных балла;
- показана стратегия для $k = 3$ – 3 первичных балла;
- показано, что $k > 2$, приведен верный ответ, но доказательство содержит ошибку – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 6. На луче SA , содержащем ребро треугольной пирамиды $SABC$, отметили такие точки B_A и C_A , что $SB_A = SB$ и $SC_A = SC$. Аналогичным образом на лучах SB и SC получили точки C_B, A_B и A_C, B_C , соответственно. Докажите, что все три прямые $B_AA_B, C_BB_C, A_C C_A$ параллельны некоторой плоскости.

Решение (RUS). Из построения ясно, что прямая B_AA_B симметрична прямой BA относительно биссектрисы угла ASB (то есть антипараллельна прямой BA относительно этого угла). Тогда эта прямая параллельна касательной к описанной окружности треугольника ASB , проведённой в точке S (что следует из свойств величины угла между хордой и касательной). Заметим, что такая касательная будет в точке S также касаться и описанной сферы пирамиды $ABCS$ (так как описанная окружность треугольника ABS – это сечение описанной сферы плоскостью (ABS)), а значит, лежать в (однозначно определённой) плоскости δ , касающейся описанной сферы пирамиды в вершине S .

Таким образом, прямая B_AA_B параллельна некоторой прямой, лежащей в δ , а потому параллельна и самой плоскости δ . Для прямых C_BB_C и $A_C C_A$ рассуждения полностью аналогичны. Таким образом, все три прямые $B_AA_B, C_BB_C, A_C C_A$ параллельны плоскости, касающейся описанной сферы пирамиды $SABC$ в вершине S .

Комментарий. Другое решение можно получить с помощью векторного метода: в базисе $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{c}$ направляющие векторы трёх упомянутых прямых можно записать как $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$, тогда у них существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору: $1 \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + 1 \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) + 1 \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$, что означает, что эти три вектора компланарны.

Критерии оценивания:

- доказана параллельность одной из прямых соответствующей касательной соответствующей описанной окружности, либо значимое продвижения для иных решений – 2 первичных балла;
- доказана параллельность одной из прямых соответствующей касательной в точке S сферы, описанной около пирамиды $SABC$, или есть значимые продвижения в доказательстве компланарности – 3 первичных балла;
- доказательство содержит только незначительную ошибку – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.