

7th degree

Task 1.

1. В тетради 12 листов. Сколькими способами можно вставить 7 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 330

2. В тетради 16 листов. Сколькими способами можно вставить 13 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 105

3. В тетради 12 листов. Сколькими способами можно вставить 8 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 165

4. В тетради 16 листов. Сколькими способами можно вставить 12 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 455

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*

Есть $12 - 1 = 11$ промежутков между соседними страницами, поэтому есть ровно $C_{11}^7 = 330$ способов расположить 7 одинаковых закладок.

Task 2.

1. Несколько контейнеров, каждый из которых весит не более 1 тонны, требуется перевезти на вагонах грузоподъемностью по 4 тонны. Какого наименьшего числа вагонов заведомо хватит для перевозки всех этих контейнеров, если их суммарная масса равна 15 тонн?

Answer: 5

2. Несколько контейнеров, каждый из которых весит не более 1 тонны, требуется перевезти на вагонах грузоподъемностью по 5 тонн. Какого наименьшего числа вагонов заведомо хватит для перевозки всех этих контейнеров, если их суммарная масса равна 28 тонн?

Answer: 7

3. Несколько контейнеров, каждый из которых весит не более 1 тонны, требуется перевезти на вагонах грузоподъемностью по 6 тонн. Какого наименьшего числа вагонов заведомо хватит для перевозки всех этих контейнеров, если их суммарная масса равна 40 тонн?

Answer: 8

4. Несколько контейнеров, каждый из которых весит не более 1 тонны, требуется перевезти на вагонах грузоподъемностью по 3 тонны. Какого наименьшего числа вагонов заведомо хватит для перевозки всех этих контейнеров, если их суммарная масса равна 18 тонн?

Answer: 9

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Загружая в вагоны наибольшее возможное число контейнеров так, чтобы не допустить перегруза, получим, что масса груза в каждом вагоне – не менее 3 тонн (иначе можно положить еще как минимум один ящик). Отсюда следует, что $15/3 = 5$ вагонов точно хватит.

Приведем пример, когда четырех вагонов недостаточно: пусть общее число контейнеров равно 17, и масса каждого из них – $15/17$ тонн. Тогда в каждый вагон можно загрузить не более 4 контейнеров (масса пяти контейнеров равна $75/17 > 4$), а в четыре вагона – не более 16 контейнеров.

Task 3.

1. Куб размера $9 \times 9 \times 9$ изначально весь покрашен в белый цвет. Каждая его грань разбита на 9 равных квадратов 3×3 , в каждом из которых центральный квадрат 1×1 красится в чёрный. Затем для каждого такого чёрного квадрата из начального куба удаляется вся внутренность прямоугольного блока $1 \times 1 \times 9$ с основанием на этом чёрном квадрате (блок, проходящий сквозь весь куб вплоть до его противоположной грани). Какой объём куба остался неудаленным?

Answer: 540

2. Куб размера $6 \times 6 \times 6$ изначально весь покрашен в белый цвет. Каждая его грань разбита на 4 равных квадрата 3×3 , в каждом из которых центральный квадрат 1×1 красится в чёрный. Затем для каждого такого чёрного квадрата из начального куба удаляется вся внутренность прямоугольного блока $1 \times 1 \times 6$ с основанием на этом чёрном квадрате (блок, проходящий сквозь весь куб вплоть до его противоположной грани). Какой объём куба остался неудаленным?

Answer: 160

3. Куб размера $12 \times 12 \times 12$ изначально весь покрашен в белый цвет. Каждая его грань разбита на 16 равных квадратов 3×3 , в каждом из которых центральный квадрат 1×1 красится в чёрный. Затем для каждого такого чёрного квадрата из начального куба удаляется вся внутренность прямоугольного блока $1 \times 1 \times 12$ с основанием на этом чёрном квадрате (блок, проходящий сквозь весь куб вплоть до его противоположной грани). Какой объём куба остался неудаленным?

Answer: 1280

4. Куб размера $15 \times 15 \times 15$ изначально весь покрашен в белый цвет. Каждая его грань разбита на 25 равных квадратов 3×3 , в каждом из которых центральный квадрат 1×1 красится в чёрный. Затем для каждого такого чёрного квадрата из начального куба удаляется вся внутренность прямоугольного блока $1 \times 1 \times 15$ с основанием на этом чёрном квадрате (блок, проходящий сквозь весь куб вплоть до его противоположной грани). Какой объём куба остался неудаленным?

Answer: 2500

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Поделим большой куб на 27 кубов $3 \times 3 \times 3$. Так как все вырезанные области проходят насквозь большого куба, то легко видеть, что каждый из этих меньших кубов оказался с одинаковыми вырезанными областями, каждая из которых выглядит как вырезанные кубы $1 \times 1 \times 1$, прилегающие к центральной клетке 1×1 в каждой из шести граней, а также вырезанный центральный кубик $1 \times 1 \times 1$. Итого, вырезано 7 единичных кубиков, а осталось $3^3 - 7 = 20$ единичных кубов. Тогда во всех 27-ми больших кубах размера $3 \times 3 \times 3$ осталось $27 \cdot 20 = 540$ единичных кубов, каждый объема 1.

Task 4.

1. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 12 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 11

2. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 24 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 14

3. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 16 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 6

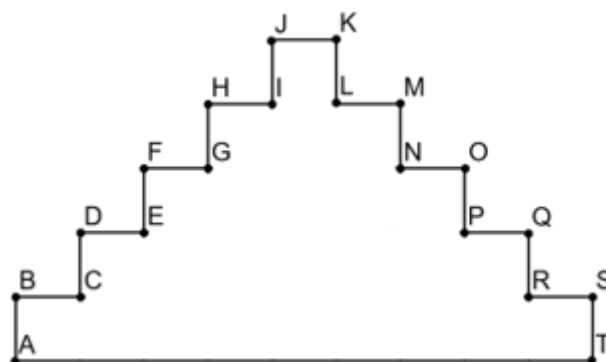
4. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 36 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 18

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

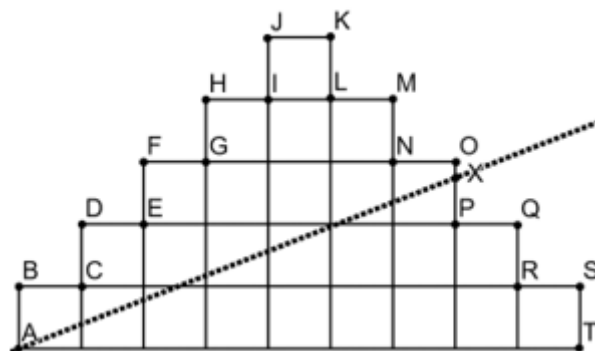
Из условия имеем $xy = 24(x + y)$, откуда $(x - 24)(y - 24) = 576 = 2^6 \cdot 3^2$ – у последнего числа $(6 + 1)(2 + 1) = 21$ делитель, причем все делители, кроме 24, разбиваются на пары a, b , для которых $a \cdot b = 576$, причем каждая пара порождает равные прямоугольники. Значит, общее число различных прямоугольников равно $(21 + 1)/2 = 11$.

Task 5. Совунья испекла пирог в форме 20-угольника $ABC \dots ST$, у которого любые две соседние стороны перпендикулярны, а длины всех сторон, кроме наибольшей стороны AT , равны (см. рис.). Лосяш хочет разрезать этот пирог одним прямолинейным разрезом, проходящим через вершину A , на две части равной площади. Какую сторону пересечёт такой разрез и в каком отношении он её разделит?



Answer: OP , $2 : 5$ ($5 : 2$)

Решение (RUS). Ясно, что данный многоугольник можно разделить на 25 равных квадратов (будем считать, что их стороны равны 1). Значит, при делении площади пополам, каждая полученная часть должна иметь площадь $25/2 = 12.5$. Также понятно, что при вращении прямой вокруг точки A против часовой стрелки от положения AT площадь части пирога, находящейся под прямой, будет возрастать, поэтому требуемое положение прямой AX (X – точка на границе многоугольника) единственно и находится между AP и AO . Действительно, в положении AP площадь под прямой равна $14/2 + 3 = 10 < 12.5$ (так как складывается из прямоугольного треугольника и трёх квадратов), а в положении AO она равна $21/2 + 3 = 13.5 > 12.5$ (по той же причине). Пусть расстояние от точки X до прямой AT равно h , тогда площадь части пирога под прямой AX равна $7h/2 + 3 = 12.5$, откуда $h = 19/7$. Это означает, что расположенная на стороне OP точка X делит эту сторону в отношении $(3 - 19/7) : (19/7 - 2) = (2/7) : (5/7) = 2 : 5$, считая от точки O .



Критерии оценивания:

- приведена плодотворная идея для поиска стороны, но сторона найдена неверно; не найдено искомое отношение – 1 первичный балл;
- сторона найдена верно, но без достаточных обоснований; не найдено искомое отношение – 2 первичных балла;
- сторона найдена верно и обоснованно; не найдено искомое отношение – 3 первичных балла;
- сторона найдена верно, но без достаточных обоснований; искомое отношение найдено, но при этом допущена ошибка – 3 первичных балла;
- сторона найдена верно и обоснованно; искомое отношение найдено либо без достаточных обоснований, либо с ошибкой – 4 первичных балла;
- сторона найдена верно, но без достаточных обоснований; искомое отношение найдено верно – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 6. Игровое поле представляет собой доску размера 5×5 , на которой расставлены белые и черные фишки, как показано на рисунке. Аня и Боря играют в игру: сначала Аня убирает с доски любую черную фишку по своему усмотрению, затем Аня и Боря по очереди (начинает Аня) передвигают фишки: Аня передвигает белую фишку на соседнее с ней пустое поле, а Боря – черную фишку на соседнее с ней пустое поле. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Докажите, что как бы ни играли Аня и Боря, рано или поздно игра закончится.

●	○	●	○	●
○	●	○	●	○
●	○	●	○	●
○	●	○	●	○
●	○	●	○	●

Решение (RUS). Покрасим клетки доски в черный и белый цвета так, чтобы в изначальной расстановке черные фишки стояли бы на черных клетках, а белые фишки – на белых клетках. Заметим, что Аня в начале игры освобождает черную клетку, а затем передвигает фишку с белой клетки на черную, освобождая таким образом белую клетку. Аналогично, Боря своим ходом передвигает фишку с черной клетки на белую, освобождая черную клетку, и т.д. Таким образом, Аня может передвигать только белые фишки с белых клеток на черные, а Боря может передвигать только черные фишки с черных полей на белые. Отсюда следует, что каждую фишку можно передвинуть не более одного раза. Значит, поскольку на доске изначально есть 12 белых и 12 черных фишек (после того, как Аня уберет одну фишку в начале игры), не позднее чем через 24 хода (12 ходов Ани и 12 ходов Бори) игра закончится.

Критерии оценивания:

- приведена, но никак не подкреплена плодотворная идея – 1 первичный балл;
- приведена плодотворная идея, но в ее подтверждение лишь приведены несколько примеров – 2 первичных балла;
- приведена и частично реализована плодотворная идея, но при реализации допущены серьезные ограничения общности – 3 первичных балла;
- приведена и реализована плодотворная идея, но с незначительными ограничениями общности – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное доказательство – 5 первичных баллов.