

7th degree

Task 1.

1. На стене висят двое часов, у обоих и минутная, и часовая стрелки смотрят строго вверх. Одни часы исправны, а другие испорчены: они идут в обратную сторону, причем в 2 раза быстрее исправных. Сколько раз в течение следующих 23 часов 59 минут исправные и испорченные часы покажут одинаковое время (не считая начального положения стрелок)?

Answer: 5

2. На стене висят двое часов, у обоих и минутная, и часовая стрелки смотрят строго вверх. Одни часы исправны, а другие испорчены: они идут в обратную сторону, причем в 3 раза быстрее исправных. Сколько раз в течение следующих 23 часов 59 минут исправные и испорченные часы покажут одинаковое время (не считая начального положения стрелок)?

Answer: 7

3. На стене висят двое часов, у обоих и минутная, и часовая стрелки смотрят строго вверх. Одни часы исправны, а другие испорчены: они идут в обратную сторону, причем в 4 раза быстрее исправных. Сколько раз в течение следующих 23 часов 59 минут исправные и испорченные часы покажут одинаковое время (не считая начального положения стрелок)?

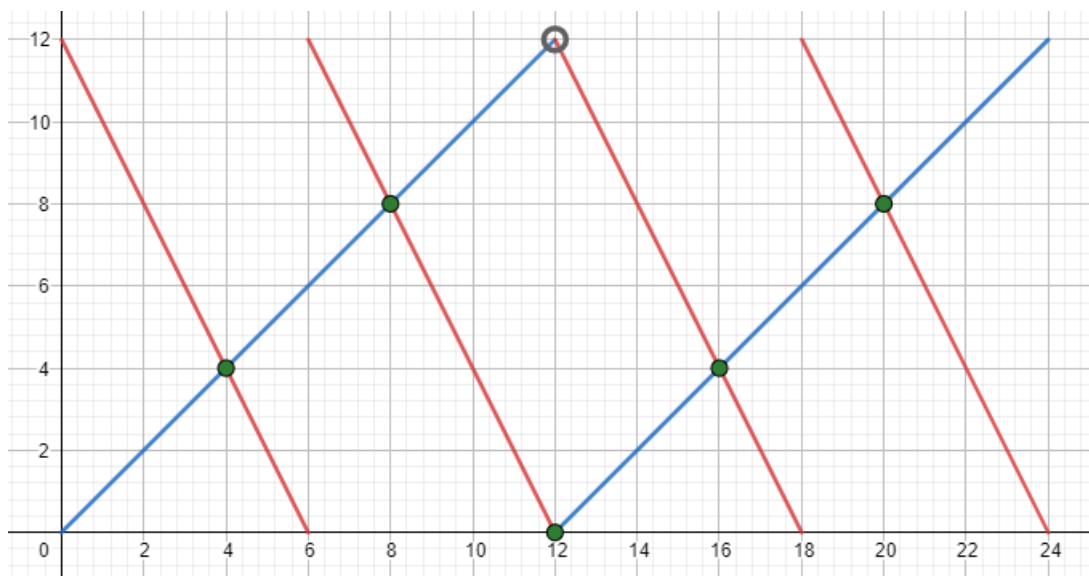
Answer: 9

4. На стене висят двое часов, у обоих и минутная, и часовая стрелки смотрят строго вверх. Одни часы исправны, а другие испорчены: они идут в обратную сторону, причем в 6 раз быстрее исправных. Сколько раз в течение следующих 23 часов 59 минут исправные и испорченные часы покажут одинаковое время (не считая начального положения стрелок)?

Answer: 13

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*

Представим, что окружность циферблата разбита на $12 \cdot 60 = 720$ равных частей, и что на часах всего одна стрелка – «минутно-часовая» – она показывает количество минут, прошедших с того момента времени, когда она была направлена строго вверх. Тогда каждому положению минутно-часовой стрелки соответствует единственное положение «обычных» минутной и часовой стрелок, и наоборот. Построим график положений минутно-часовой стрелки на исправных (синий) и неисправных (красный) часах в зависимости от времени, прошедшего с начала суток:



Зелеными точками показаны пересечения графиков, их абсциссы соответствуют времени, когда часы показывают одинаковое время. (точки $(12; 0)$ и $(12; 12)$ соответствуют одному и тому же времени – полдень – поэтому учитывается только одна из них, и вторая не закрашена зеленым).

Неисправные часы идут в обратном направлении и вдвое быстрее исправных, поэтому соответствующие отрезки имеют отрицательный угловой коэффициент, притом вдвое больший по модулю, чем таковой у синих отрезков.

Task 2.

1. Пусть n – наименьшее 54-значное положительное целое число (в десятичной записи; первая цифра числа не равна 0), кратное 2475. Какой остаток дает n при делении на 10000?

Answer: 1475

2. Пусть n – наименьшее 49-значное положительное целое число (в десятичной записи; первая цифра числа не равна 0), кратное 2475. Какой остаток дает n при делении на 10000?

Answer: 2375

3. Пусть n – наименьшее 134-значное положительное целое число (в десятичной записи; первая цифра числа не равна 0), кратное 825. Какой остаток дает n при делении на 1000?

Answer: 650

4. Пусть n – наименьшее 87-значное положительное целое число (в десятичной записи; первая цифра числа не равна 0), кратное 825. Какой остаток дает n при делении на 1000?

Answer: 725

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)
 $2475 = 9 \cdot 11 \cdot 25$, т.е. n кратно 9, 11 и 25. Наименьшее 54-значное n записывается в виде $\overline{100 \dots 00abcd}$, причем

1. $a + b + c + d + 1$ кратно 9,
2. $\overline{cd}$ кратно 25,
3. $1 + a + c - b - d$ кратно 11.

Пятая цифра справа равна 0, поскольку среди 10000 подряд идущих чисел $100 \dots 00$, $100 \dots 01$, $100 \dots 02$, ..., $100 \dots 09998$, $100 \dots 09999$ найдется число, кратное 4-значному 2475.

Перебором a, b, c, d с учетом вышеприведенных условий 1-3 убеждаемся, что число $n = \overline{100 \dots 001475}$ – искомое, причем оно является наименьшим, поскольку $n - 2475$ уже не является 54-значным. Очевидно, его остаток от деления на 10000 равен 1475.

Task 3.

1. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 5 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 5 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 3300

2. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 4 дополнительных гостевых домика, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 4 домика, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 2640

3. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 5 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 7 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 5 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 6 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 5460

4. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 6 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 6 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 3960

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Обозначим количество туристов, приехавших в один год из перечисленных (то есть, согласно условию, в каждый из них) за t , а количество домиков на территории в 2023 году за d . Среднее количество домиков в 2023 году равно $\frac{t}{d}$, в 2024 году равно $\frac{t}{d+5}$, а в 2025 году равно $\frac{t}{d+10}$. Тогда из условия имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{t}{d+5} + 6 = \frac{t}{d} \\ \frac{t}{d+10} + 11 = \frac{t}{d} \end{cases}$$

Домножим первое выражение на положительную величину $d(d+5)$ и получим $dt+6d(d+5) = dt+5t$, что упрощается до $6d(d+5) = 5t$. Аналогично из второго уравнения получаем $11d(d+10) = 10t$. Домножая первое из этих двух условий на 2, имеем $12d(d+5) = 10t = 11d(d+10)$, откуда имеем $12(d+5) = 11(d+10)$. Решая это простое линейное уравнение получаем единственное решение $d = 60$. Откуда $t = 6d(d+5)/5 = \frac{6 \cdot 60 \cdot 65}{5} = 3300$.

Task 4. В условиях всех 4-х вариантов этой задачи допущена одна и та же ошибка: указанное 10-значное число в 6 раз больше задуманного. Ответы на некорректно сформулированную задачу не проверялись и не учитывались при формировании баллов.

1. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2719997280. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 136789

2. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2319997680. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 123689

3. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2159997840. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 123489

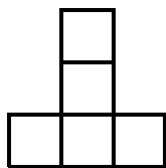
4. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2799997200. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 146789

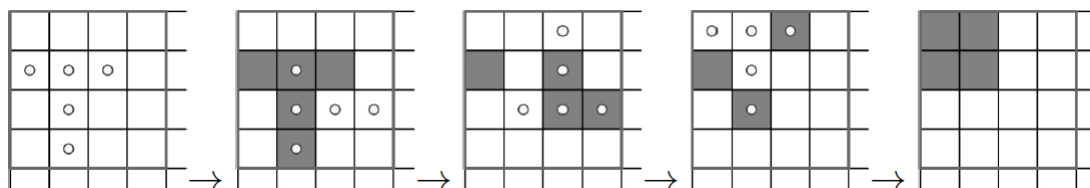
Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)
(число 2719997280 в условии заменено на $2719997280 : 6 = 453332880$)

Пусть число, записанное Андреем, равно $x = \overline{abcdef} = 10^5 \cdot a + 10^4 \cdot b + 10^3 \cdot c + 10^2 \cdot d + 10 \cdot e + f$, тогда сумма всех чисел, получаемых из него перестановкой цифр, равна $5! \cdot (a + b + c + d + e + f) \cdot 111111 = 453332880$, откуда $a + b + c + d + e + f = 34$. Чтобы число x было наименьшим, его цифры должны быть расположены в порядке возрастания слева направо. Полагая $a = 1$, получаем $b + c + d + e + f = 33$, тогда $b \geq 3$, иначе $c + d + e + f = 31$, но $6 + 7 + 8 + 9 = 30$ – отсюда $b \neq 2$. Далее $c + d + e + f = 30$, откуда и получаем $x = 136789$.

Task 5. Дана квадратная таблица $n \times n$ ($n \geq 4$), все клетки которого изначально белые. Разрешается поменять цвет клетки (с белого на черный и с черного на белый) в фигуре в форме буквы «Т» (см. рисунок), которая может быть повернута на 90° , 180° или 270° . Докажите, что если n делится или на 2, или на 3, то таблицу можно перекрасить так, чтобы все клетки стали черными.

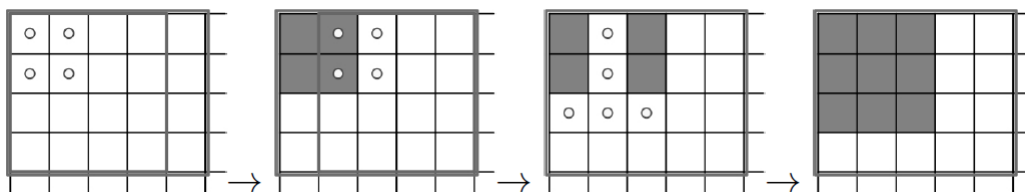


Решение (RUS). Если n делится на 2, можно действовать так ($n \geq 4$, поэтому на доске хватит места для совершения указанных операций):



Таким образом, закрашивая последовательно квадраты 2×2 , мы в конечном счете закрасим весь квадрат $n \times n$.

Если n делится на 3, разобьем таблицу на квадраты 3×3 и будем перекрашивать их следующим образом:

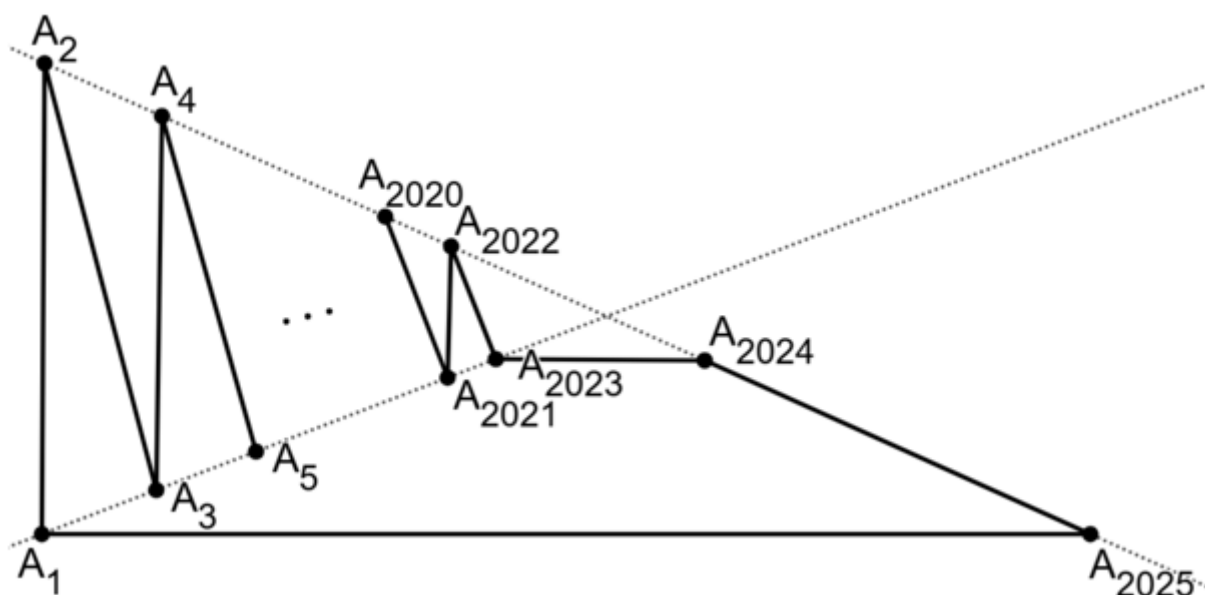


Критерии оценивания:

- приведена идея разбиения на квадраты 2×2 , 3×3 – 1 первичный балл;
- приведено частичное доказательство одного из двух описанных случаев – 2 первичных балла;
- приведено полное доказательство одного из двух случаев – 3 первичных балла;
- приведены доказательства обоих случаев, но допущена незначительная ошибка – 4 первичных балла;
- полное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 6. Вупсень утверждает, что может нарисовать такой 2025-угольник, что все его вершины будут лежать на некоторых трёх прямых. На это Пупсень ответил, что может нарисовать такой 2025-угольник, что все его вершины будут лежать не на трёх, а всего на двух прямых. Прав ли Вупсень? Прав ли Пупсень?

Решение (RUS). Приведенный пример подтверждает, что правы и Вупсень, и Пупсень:



Критерии оценивания:

- верный ответ при неверной попытке его изображения (или ее отсутствии), либо непонятное текстовое описание примера – 1 первичный балл;
- верный ответ, верный пример – 5 первичных баллов.