

8th degree

Task 1.

1. В тетради 12 листов. Сколькими способами можно вставить 7 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 330

2. В тетради 16 листов. Сколькими способами можно вставить 13 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 105

3. В тетради 12 листов. Сколькими способами можно вставить 8 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 165

4. В тетради 16 листов. Сколькими способами можно вставить 12 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 455

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Есть $12 - 1 = 11$ промежутков между соседними страницами, поэтому есть ровно $C_{11}^7 = 330$ способов расположить 7 одинаковых закладок.

Task 2.

1. Найдите остаток от деления 5^{157} на 23.

Answer: 10

2. Найдите остаток от деления 7^{274} на 17.

Answer: 15

3. Найдите остаток от деления 3^{539} на 29.

Answer: 12

4. Найдите остаток от деления 11^{122} на 13.

Answer: 4

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Согласно малой теореме Ферма, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ для простого p и не кратного ему натурального a . Имеем

$$5^{157} = (5^{22})^7 \cdot 5^3 \equiv 1^7 \cdot 5^3 \equiv 125 \equiv 10 \pmod{23}$$

Task 3.

1. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 12 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 11

2. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 24 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 14

3. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 16 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 6

4. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 36 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 18

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Из условия имеем $xy = 24(x + y)$, откуда $(x - 24)(y - 24) = 576 = 2^6 \cdot 3^2$ – у последнего числа $(6 + 1)(2 + 1) = 21$ делитель, причем все делители, кроме 24, разбиваются на пары a, b , для которых $a \cdot b = 576$, причем каждая пара порождает равные прямоугольники. Значит, общее число различных прямоугольников равно $(21 + 1)/2 = 11$.

Task 4.

1. Дан набор цифр: 0, 1, 2, 2, 7, 0, 6, 6, 4, 8. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 75. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 2520

2. Дан набор цифр: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 5, 6, 7, 8. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 60. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 12000

3. Дан набор цифр: 0, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 7, 8, 9. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 225. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 16380

4. Дан набор цифр: 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6, 9, 9. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 180. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 1260

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 25. Чтобы полученное число делилось на 25, оно должно оканчиваться на 00, 25, 50 или 75, но цифры 5 в наборе нет, поэтому требуемое число оканчивается на 00, и цифру 0 удалять нельзя. Чтобы число делилось на 3, требуется, чтобы сумма его цифр делилась на 3. Сумма цифр приведенного набора равна $0 + 1 + 2 + 2 + 7 + 0 + 6 + 6 + 4 + 8 = 36$ – значит, чтобы сумма цифр требуемого числа делилась на 3. Итак, можно удалить только цифру 6.

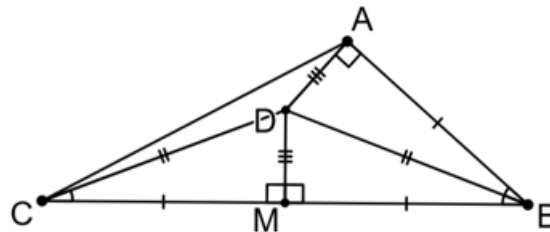
Удалив цифру 6, мы получим число вида $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 00}$, где $a_1, \dots, a_7$ – цифры 1, 2, 2, 7, 6, 4, 8 в некотором порядке, и есть $\frac{7!}{2!} = 2520$ способов переставить их всевозможными способами.

Task 5. Про треугольник известно, что в нём одна сторона в два раза больше другой, а угол между этими сторонами не превосходит 60° . Обязательно ли этот треугольник можно разрезать на четыре треугольные части, три из которых – равные треугольники, а четвёртая им не равна?

Answer: yes.

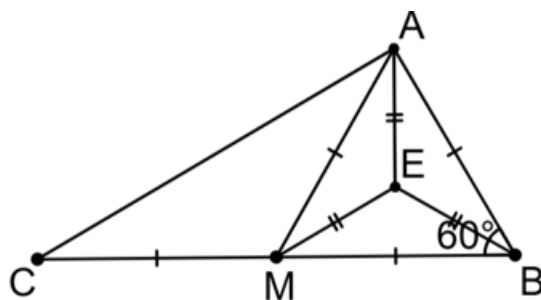
Решение (RUS). Пусть $BC = 2 \cdot AB$ (ABC – исходный треугольник). Рассмотрим отдельно два случая: когда $\angle ABC < 60^\circ$, и когда $\angle ABC = 60^\circ$.

В первом случае подойдёт следующее разрезание: отметим точку D пересечения серединного перпендикуляра к BC с биссектрисой угла ABC и разделим треугольник на части так, как показано на рисунке.



Докажем корректность построения. Точка D по построению находится внутри угла, образованного лучами BA и BC , и при этом $\angle DCB = \angle DBC = \angle DBA = \frac{1}{2}\angle ABC$ и $\angle DAB = \angle DMB = 90^\circ$, откуда $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD = \frac{3}{2}\angle ABC + 90^\circ < \frac{3}{2} \cdot 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то есть точка D будет действительно расположена строго внутри треугольника ABC . Равенство треугольников ADB, MDB, MDC очевидно из построения, а тот факт, что треугольник ADC им не равен, следует, например, из того, что он тупоугольный ($\angle ADC = 360^\circ - 3 \cdot \angle ADB > 360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$), а остальные – прямоугольные.

Во втором случае (когда $\angle ABC = 60^\circ$) имеем треугольник с углами $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$: проведём медиану AM к его гипотенузе и разделим образовавшийся равносторонний треугольник ABM с центром E на три равные треугольные части, как показано на втором рисунке.

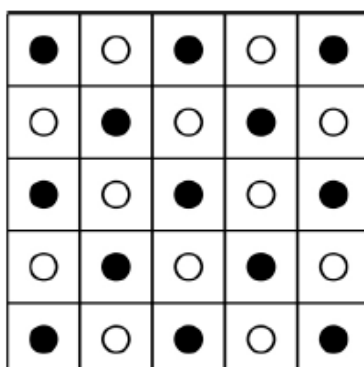


Равенство треугольников AEB , BEM , MEA очевидно из построения, а тот факт, что треугольник AMC им не равен, следует, например, из того, что его наибольшая сторона больше, чем наибольшие стороны этих треугольников ($AC > AM$, так как $\angle AMC > 120^\circ$ – наибольший в треугольнике AMC).

Критерии оценивания:

- приведен корректный пример для случая с углом в 60 градусов: +1 первичный балл;
- доказана корректность примера для случая с углом в 60 градусов: +1 первичный балл;
- приведен корректный пример для случая с углом, меньшим 60 градусов: +1 первичный балл;
- доказана корректность примера для случая с углом, меньшим 60 градусов: +1 первичный балл;
- приведено доказательство нахождения точки пересечения серединного перпендикуляра и биссектрисы внутри треугольника: +1 первичный балл.

Task 6. Игровое поле представляет собой доску размера 5×5 , на которой расставлены белые и черные фишки, как показано на рисунке. Аня и Боря играют в игру: сначала Аня убирает с доски любую черную фишку по своему усмотрению, затем Аня и Боря по очереди (начинает Аня) передвигают фишки: Аня передвигает белую фишку на соседнее с ней пустое поле, а Боря – черную фишку на соседнее с ней пустое поле. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Кто из игроков выиграет при правильной игре, т.е. независимо от ходов соперника? Опишите победную стратегию и докажете, что она является таковой.



Решение (RUS). Докажем, что выигрывает Боря. После того, как Аня уберет с доски черную фишку, Боря разобьет доску на доминошки (прямоугольники 1×2) – легко видеть, что это всегда можно сделать. Тогда каждым своим ходом Аня освобождает белую клетку в некоторой

доминошке, и Боря может поставить в эту клетку черную фишку из этой доминошки. Таким образом, Боря всегда может сделать ход, если ход перед ним сделала Аня.

Докажем, что игра не может продолжаться бесконечно долго. Покрасим клетки доски в черный и белый цвета так, чтобы в изначальной расстановке черные фишки стояли бы на черных клетках, а белые фишки – на белых клетках. Заметим, что Аня в начале игры освобождает черную клетку, а затем передвигает фишку с белой клетки на черную, освобождая таким образом белую клетку. Аналогично, Боря своим ходом передвигает фишку с черной клетки на белую, освобождая черную клетку, и т.д. Таким образом, Аня может передвигать только белые фишки с белых клеток на черные, а Боря может передвигать только черные фишки с черных полей на белые. Отсюда следует, что каждую фишку можно передвинуть не более одного раза. Значит, поскольку на доске изначально есть 12 белых и 12 черных фишек (после того, как Аня уберет одну фишку в начале игры), не позднее чем через 24 хода (12 ходов Ани и 12 ходов Бори) игра закончится.

Критерии оценивания:

- доказано, что игра обязательно закончится: +2 первичных балла;
- дан верный ответ, приведена и верно обоснована победная стратегия: +3 первичных балла;
- допущены незначительные ошибки: -1 первичный балл за каждую.