

8th degree

Task 1.

1. На стене висят двое часов, у обоих и минутная, и часовая стрелки смотрят строго вверх. Одни часы исправны, а другие испорчены: они идут в обратную сторону, причем в 2 раза быстрее исправных. Сколько раз в течение следующих 23 часов 59 минут исправные и испорченные часы покажут одинаковое время (не считая начального положения стрелок)?

Answer: 5

2. На стене висят двое часов, у обоих и минутная, и часовая стрелки смотрят строго вверх. Одни часы исправны, а другие испорчены: они идут в обратную сторону, причем в 3 раза быстрее исправных. Сколько раз в течение следующих 23 часов 59 минут исправные и испорченные часы покажут одинаковое время (не считая начального положения стрелок)?

Answer: 7

3. На стене висят двое часов, у обоих и минутная, и часовая стрелки смотрят строго вверх. Одни часы исправны, а другие испорчены: они идут в обратную сторону, причем в 4 раза быстрее исправных. Сколько раз в течение следующих 23 часов 59 минут исправные и испорченные часы покажут одинаковое время (не считая начального положения стрелок)?

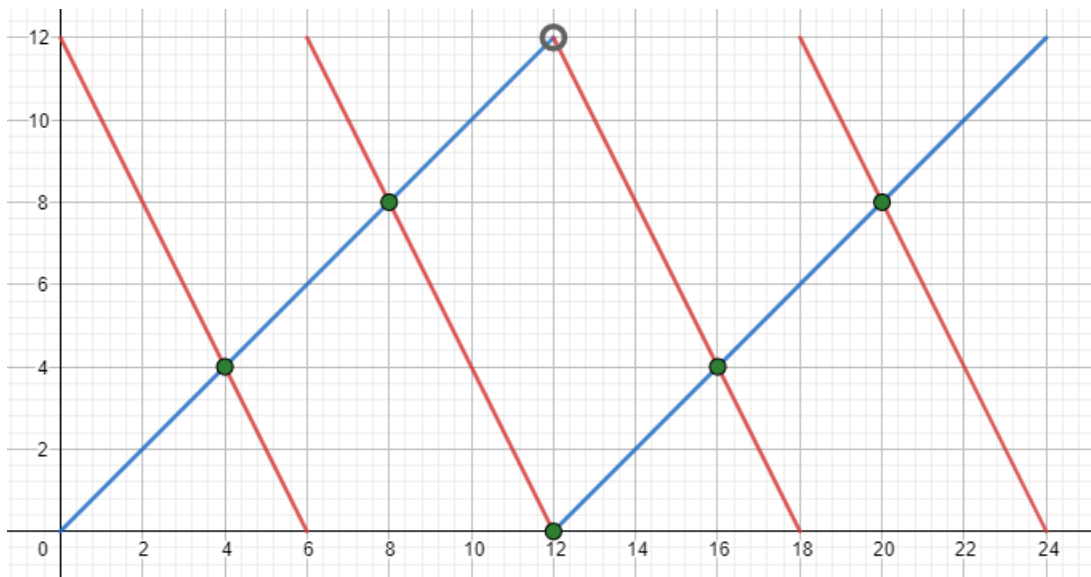
Answer: 9

4. На стене висят двое часов, у обоих и минутная, и часовая стрелки смотрят строго вверх. Одни часы исправны, а другие испорчены: они идут в обратную сторону, причем в 6 раз быстрее исправных. Сколько раз в течение следующих 23 часов 59 минут исправные и испорченные часы покажут одинаковое время (не считая начального положения стрелок)?

Answer: 13

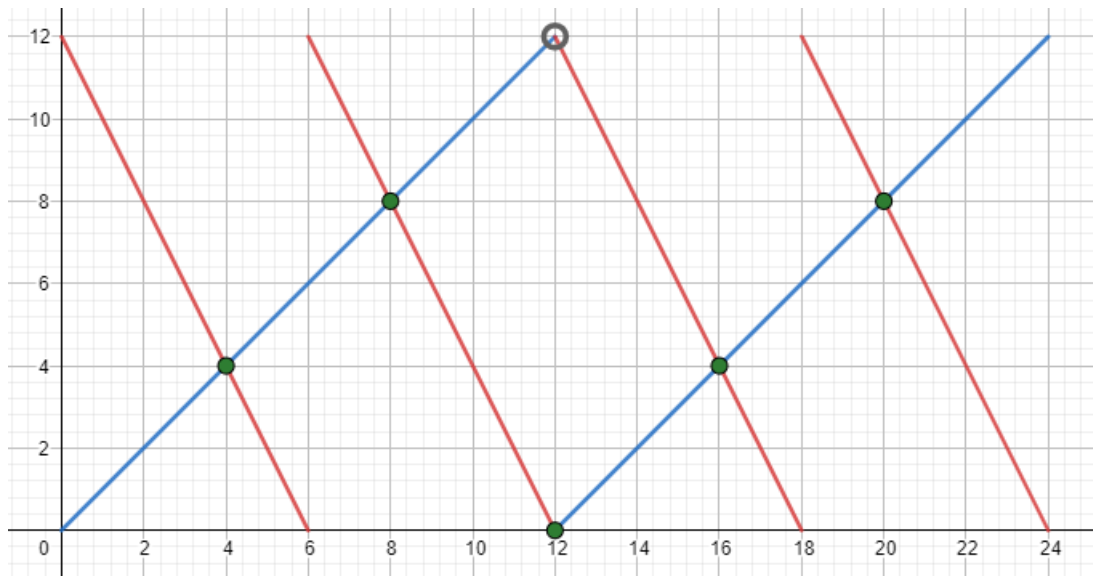
Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*

Представим, что окружность циферблата разбита на $12 \cdot 60 = 720$ равных частей, и что на часах всего одна стрелка – «минутно-часовая» – она показывает количество минут, прошедших с того момента времени, когда она была направлена строго вверх. Тогда каждому положению минутно-часовой стрелки соответствует единственное положение «обычных» минутной и часовой стрелок, и наоборот. Построим график положений минутно-часовой стрелки на исправных (синий) и неисправных (красный) часах в зависимости от времени, прошедшего с начала суток:



Зелеными точками показаны пересечения графиков, их абсциссы соответствуют времени, когда часы показывают одинаковое время. (точки $(12; 0)$ и $(12; 12)$ соответствуют одному и тому же времени – полдень – поэтому учитывается только одна из них, и вторая не закрашена зеленым).

Неисправные часы идут в обратном направлении и вдвое быстрее исправных, поэтому соответствующие отрезки имеют отрицательный угловой коэффициент, притом вдвое больший по модулю, чем таковой у синих отрезков.



Task 2.

1. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 30 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 210

2. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 36 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 306

3. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 24 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 132

4. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 40 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 380

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Выберем человека (пусть его зовут A), сделавшего наименьшее число (k) рукопожатий. Тогда все остальные 29 человек, кроме A , можно разбить на 2 группы: в первой группе будут k людей, которые пожали руку A (каждый из них сделал не менее k рукопожатий), а во второй – $29 - k$ людей, кому A не пожал руку. Согласно условию, все люди из второй группы должны пожать руки друг другу ($\frac{1}{2}(29 - k)(28 - k)$ рукопожатий), иначе двое не пожавших друг другу руки вместе с A образуют тройку людей без рукопожатий, что исключено условием задачи. Итак, общее число рукопожатий не меньше чем

$$\frac{1}{2}(k + k^2 + (29 - k)(28 - k)) = k^2 - 28k + 406 = (k - 14)^2 + 210 \geq 210$$

Равенство достигается, если разбить все 30 человек на две равные группы, в каждой из которых все пожмут друг другу руки, при этом между группами рукопожатий не будет.

Task 3.

1. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 5 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 5 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 3300

2. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 4 дополнительных гостевых домика, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 4 домика, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 2640

3. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 5 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 7 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 5 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 6 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 5460

4. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 6 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 6 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 3960

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Обозначим количество туристов, приехавших в один год из перечисленных (то есть, согласно условию, в каждый из них) за t , а количество домиков на территории в 2023 году за d . Среднее количество домиков в 2023 году равно $\frac{t}{d}$, в 2024 году равно $\frac{t}{d+5}$, а в 2025 году равно $\frac{t}{d+10}$.

Тогда из условия имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{t}{d+5} + 6 = \frac{t}{d} \\ \frac{t}{d+10} + 11 = \frac{t}{d} \end{cases}$$

Домножим первое выражение на положительную величину $d(d+5)$ и получим $dt+6d(d+5) = dt+5t$, что упрощается до $6d(d+5) = 5t$. Аналогично из второго уравнения получаем $11d(d+10) = 10t$. Домножая первое из этих двух условий на 2, имеем $12d(d+5) = 10t = 11d(d+10)$, откуда имеем $12(d+5) = 11(d+10)$. Решая это простое линейное уравнение получаем единственное решение $d = 60$. Откуда $t = 6d(d+5)/5 = \frac{6 \cdot 60 \cdot 65}{5} = 3300$.

Task 4. В условиях всех 4-х вариантов этой задачи допущена одна и та же ошибка: указанное 10-значное число в 6 раз больше задуманного. Ответы на некорректно сформулированную задачу не проверялись и не учитывались при формировании баллов.

1. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2719997280. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 136789

2. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2319997680. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 123689

3. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2159997840. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 123489

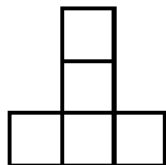
4. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2799997200. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 146789

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично) (число 2719997280 в условии заменено на $2719997280 : 6 = 453332880$)

Пусть число, записанное Андреем, равно $x = \overline{abcdef} = 10^5 \cdot a + 10^4 \cdot b + 10^3 \cdot c + 10^2 \cdot d + 10 \cdot e + f$, тогда сумма всех чисел, получаемых из него перестановкой цифр, равна $5! \cdot (a+b+c+d+e+f) \cdot 111111 = 453332880$, откуда $a+b+c+d+e+f = 34$. Чтобы число x было наименьшим, его цифры должны быть расположены в порядке возрастания слева направо. Полагая $a = 1$, получаем $b+c+d+e+f = 33$, тогда $b \geq 3$, иначе $c+d+e+f = 31$, но $6+7+8+9 = 30$ – отсюда $b \neq 2$. Далее $c+d+e+f = 30$, откуда и получаем $x = 136789$.

Task 5. Дана квадратная таблица $n \times n$ ($n \geq 3$), все клетки которого изначально белые. Разрешается поменять цвет клетки (с белого на черный и с черного на белый) в фигуре в форме буквы «Т» (см. рисунок), которая может быть повернута на 90° , 180° или 270° . Докажите, что если n не делится ни на 2, ни на 3, то таблицу нельзя перекрасить так, чтобы все клетки стали черными.



Решение (RUS). Пронумеруем столбцы числами $0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через a_i ($i = 0, 1, 2$) количество черных клеток в столбцах с номером i . Заметим, что каждое перекрашивание меняет четность чисел a_0, a_1, a_2 . При этом, поскольку в начале $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, четности всех чисел a_i в каждый момент времени одинаковы – значит, в каждый момент времени числа a_0 и a_2 имеют одинаковую четность.

Предположим, что мы смогли перекрасить всю табличку, и посмотрим на четности чисел a_0 и a_2 . Поскольку n не делится на 3, в таблице столбцов с номером 0 на один больше, чем столбцов с номером 2, а значит, в конечный момент времени количество клеток в столбцах с номером 0 на n больше, чем количество клеток в столбцах с номером 2, т.е. $a_0 - a_2 = n$. Но n нечетно, поэтому числа a_0 и a_2 должны быть разной четности – противоречие. Таким образом, перекрасить всю таблицу в черный цвет невозможно.

Критерии оценивания:

- приведено верное разбиение доски по строкам или столбцам – 1 первичный балл;
- приведено верное разбиение доски + идея про четность сумм в описанных группах – 3 первичных балла.
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 6. В равностороннем треугольнике ABC с центром O точка M – середина стороны AB . Биссектриса угла BOM пересекает вписанную окружность треугольника ABC в точке P . Биссектриса угла AMO повторно пересекает эту же окружность в точке Q . Докажите, что $\angle AQC = \angle APB$.

Решение (RUS). Так как треугольник ABC равносторонний, $\angle OMQ = \frac{1}{2}\angle CMA = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$. Отрезки OM и OQ равны как радиусы одной окружности, значит, треугольник MOQ – равнобедренный прямоугольный, $\angle MOQ = 90^\circ$. Отсюда $\angle POQ = \angle MOQ + \frac{1}{2}\angle BOM = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle MBO - \angle BMO) = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Отрезки OP и OQ равны как радиусы одной окружности. Значит, при повороте $R_O^{120^\circ}$ (вокруг точки O на 120°) точка P перейдет в точку Q . Но при таком повороте вокруг центра равностороннего треугольника точка B перейдет в точку A , и точка A перейдет в точку C . Следовательно, треугольник ABP при этом повороте перейдет в треугольник CAQ – значит, эти треугольники равны, а потому равны и их соответственные элементы, в частности, $\angle APB = \angle AQC$, что и требовалось доказать.

