

9th degree

Task 1.

1. В тетради 12 листов. Сколькими способами можно вставить 7 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 330

2. В тетради 16 листов. Сколькими способами можно вставить 13 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 105

3. В тетради 12 листов. Сколькими способами можно вставить 8 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 165

4. В тетради 16 листов. Сколькими способами можно вставить 12 одинаковых закладок между листами так, чтобы между каждой парой соседних листов было не более одной закладки?

Answer: 455

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Есть $12 - 1 = 11$ промежутков между соседними страницами, поэтому есть ровно $C_{11}^7 = 330$ способов расположить 7 одинаковых закладок.

Task 2.

1. Найдите остаток от деления 5^{157} на 23.

Answer: 10

2. Найдите остаток от деления 7^{274} на 17.

Answer: 15

3. Найдите остаток от деления 3^{539} на 29.

Answer: 12

4. Найдите остаток от деления 11^{122} на 13.

Answer: 4

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*

Согласно малой теореме Ферма, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ для простого p и не кратного ему натурального a . Имеем

$$5^{157} = (5^{22})^7 \cdot 5^3 \equiv 1^7 \cdot 5^3 \equiv 125 \equiv 10 \pmod{23}$$

Task 3.

1. Для некоторых вещественных a и b решения

$$a \leq x^2 + 2x - 3 \leq b,$$

отмеченные на координатной оси, образуют два непересекающихся отрезка суммарной длины 10. Найдите значение величины $\sqrt{4+b} + \sqrt{4+a}$ при $b-a=40$, при необходимости округлив его до тысячных.

Answer: 8

2. Для некоторых вещественных a и b решения

$$a \leq x^2 + 2x - 3 \leq b,$$

отмеченные на координатной оси, образуют два непересекающихся отрезка суммарной длины 5. Найдите значение величины $\sqrt{4+b} + \sqrt{4+a}$ при $b-a=40$, при необходимости округлив его до тысячных.

Answer: 16

3. Для некоторых вещественных a и b решения

$$a \leq x^2 - 5x + 6 \leq b,$$

отмеченные на координатной оси, образуют два непересекающихся отрезка суммарной длины 16. Найдите значение величины $\sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4a}$ при $b-a=40$, при необходимости округлив его до тысячных.

Answer: 10

4. Для некоторых вещественных a и b решения

$$a \leq x^2 - 5x + 6 \leq b,$$

отмеченные на координатной оси, образуют два непересекающихся отрезка суммарной длины 8. Найдите значение величины $\sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4a}$ при $b-a=40$, при необходимости округлив его до тысячных.

Answer: 20

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть равенство $a = x^2 + 2x - 3$ выполняется для точек l_a, r_a ($l_a \leq r_a$). Если равенство не достигается, т.е. это квадратное уравнение не имеет корней, то в условиях задачи не могло получиться двух отрезков решений. Аналогично, должны существовать корни $l_b \leq r_b$ для равенства $x^2 + 2x - 3 = b$. Тогда в силу $a < b$ получаем, что $[l_a, r_a] \subset [l_b, r_b]$ и $10 = (r_b - l_b) - (r_a - l_a)$. Эта величина вычисляется, например, по формуле корней квадратного уравнения, и равна

$$10 = \sqrt{(1 - (-3))^2 + 4b} - \sqrt{(1 - (-3))^2 + 4a} = 2 \cdot (\sqrt{4 + b} - \sqrt{4 + a}) = \frac{2(b - a)}{\sqrt{4 + b} + \sqrt{4 + a}},$$

что приводит к $\sqrt{4 + b} + \sqrt{4 + a} = 2(b - a)/10 = 80/10 = 8$.

Task 4.

1. Числа $1, 2, 3, \dots, 36$ выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. $1, 2, 3, \dots, 36$ против часовой стрелки?

Answer: 306

2. Числа $1, 2, 3, \dots, 60$ выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. $1, 2, 3, \dots, 60$ против часовой стрелки?

Answer: 870

3. Числа $1, 2, 3, \dots, 24$ выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. $1, 2, 3, \dots, 24$ против часовой стрелки?

Answer: 132

4. Числа $1, 2, 3, \dots, 40$ выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. $1, 2, 3, \dots, 40$ против часовой стрелки?

Answer: 380

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Будем считать, что числа расположены в вершинах правильного n -угольника, а требуемое минимальное число перестановок обозначим за $f(n)$. Чтобы поменять местами числа, расположенные друг от друга «на расстоянии» k сторон нашего многоугольника (считаем $k \leq n/2$, иначе будем переставлять вдоль другой дуги окружности, описанной около n -угольника), требуется не менее $[(k - 1)/2]$ секунд ($[t]$ – целая часть числа t), т.е. $f(n) \geq f(n - 1) + [(n - 1)/2]$ – значит,

$$f(2k) \geq 1 + [3/2] + [5/2] + \dots + [(2k-1)/2] = 2(1 + 2 + \dots + (k-1)) = k^2 - k$$

$$f(2k+1) \geq f(2k) + [2k/2] = k^2$$

На то, чтобы поменять порядок следования чисел $1, 2, \dots, k$ на противоположный, будем последовательно переставлять 1 и 2, 1 и 3, ... 1 и k , затем 2 и 3, 2 и 4, ..., 2 и k и т.д. – потребуется $(k-1) + (k+2) + \dots + 1 = (k^2 - k)/2$ секунд. Для того, чтобы переставить остальные $n - k$ чисел, потребуется еще $(n - k)(n - k - 1)/2$ секунд – итого $(n^2 - 2n)/4$ секунд для четного n .

Task 5. Игровое поле представляет собой доску размера 5×5 , на которой расставлены белые и черные фишки, как показано на рисунке. Аня и Боря играют в игру: сначала Аня убирает с доски любую черную фишку по своему усмотрению, затем Аня и Боря по очереди (начинает Аня) передвигают фишки: Аня передвигает белую фишку на соседнее с ней пустое поле, а Боря – черную фишку на соседнее с ней пустое поле. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Кто из игроков выиграет при правильной игре, т.е. независимо от ходов соперника? Опишите победную стратегию и докажете, что она является таковой.

●	○	●	○	●
○	●	○	●	○
●	○	●	○	●
○	●	○	●	○
●	○	●	○	●

Решение (RUS). Докажем, что выигрывает Боря. После того, как Аня уберет с доски черную фишку, Боря разобьет доску на доминошки (прямоугольники 1×2) – легко видеть, что это всегда можно сделать. Тогда каждым своим ходом Аня освобождает белую клетку в некоторой доминошке, и Боря может поставить в эту клетку черную фишку из этой доминошки. Таким образом, Боря всегда может сделать ход, если ход перед ним сделала Аня.

Докажем, что игра не может продолжаться бесконечно долго. Покрасим клетки доски в черный и белый цвета так, чтобы в изначальной расстановке черные фишки стояли бы на черных клетках, а белые фишки – на белых клетках. Заметим, что Аня в начале игры освобождает черную клетку, а затем передвигает фишку с белой клетки на черную, освобождая таким образом белую клетку. Аналогично, Боря своим ходом передвигает фишку с черной клетки на белую, освобождая черную клетку, и т.д. Таким образом, Аня может передвигать только белые фишки с белых клеток на черные, а Боря может передвигать только черные фишки с черных полей на белые. Отсюда следует, что каждую фишку можно передвинуть не более одного раза. Значит, поскольку на доске изначально есть 12 белых и 12 черных фишек (после того, как Аня уберет одну фишку в начале игры), не позднее чем через 24 хода (12 ходов Ани и 12 ходов Бори) игра закончится.

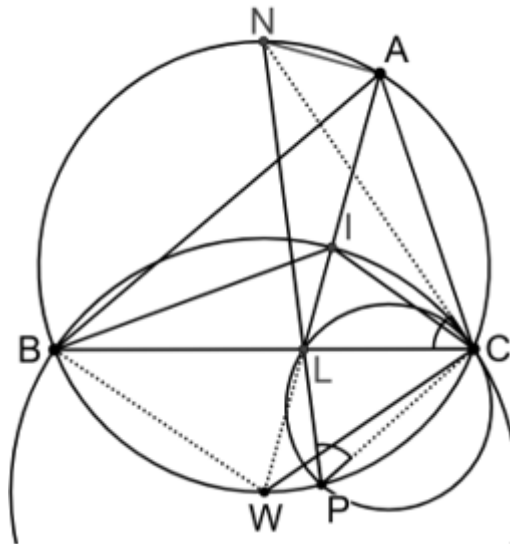
Критерии оценивания:

- доказано, что игра обязательно закончится: +2 первичных балла;
- дан верный ответ, приведена и верно обоснована победная стратегия: +3 первичных балла;
- допущены незначительные ошибки: -1 первичный балл за каждую.

Task 6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса AL , а также биссектриса внешнего угла A , повторно пересекающая описанную окружность треугольника в точке N . Прямая NL повторно пересекает описанную окружность треугольника в точке P ; точка I – центр вписанной окружности $\triangle ABC$. Докажите, что описанные окружности треугольников BIC и LPC касаются.

Решение (RUS). Продлим биссектрису AL до повторного пересечения с окружностью в точке W , середины дуги BC этой окружности, не содержащей точку A , а точка N повторного пересечения биссектрисы внешнего угла A треугольника с его описанной окружностью – середина дуги BAC . Также заметим, что, по лемме о трезубце, $WB = WC = WI$, то есть W – центр окружности (BIC) . Проведём прямую NC и докажем, что обе окружности (BIC) и (LPC) касаются её в точке C , откуда сразу будет следовать требуемое.

Чтобы проверить касание NC и (BIC) , достаточно показать, что величина угла NCB равна половине градусной меры дуги BIC в окружности (BIC) . Но угол BWC – центральный в этой окружности, и потому действительно $\angle NCB = \angle NWB = \frac{1}{2}\angle BWC$ – половина градусной меры дуги BIC (либо можно сразу заметить, что $\angle WCN = 90^\circ$ как вписанный, опирающийся на диаметр WN). Наконец, чтобы проверить касание NC и (LPC) , достаточно показать, что величина угла NCL равна величине вписанного угла, опирающегося на соответствующую дугу в окружности (LPC) . Это действительно так, поскольку $\angle NCL = \angle NCB$ – половина градусной меры дуг NB, NC , т.е. $\angle NCL = \angle NPC = \angle LPC$.



Критерии оценивания:

- приведена идея решения – 1 первичный балл;
- приведена и частично реализована плодотворная идея решения, но вычисления опущены или выполнены с ошибкой – 2 первичных балла;
- полное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.