

9th degree

Task 1.

1. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 5 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 5 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 3300

2. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 4 дополнительных гостевых домика, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 4 домика, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 2640

3. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 5 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 7 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 5 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 6 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 5460

4. Количество туристов, приезжающих в эко-курорт «Простоквашино» было одинаковым в 2023, в 2024 и в 2025 году. Размещение туристов на территории курорта происходит в гостевых домиках. В 2024 году на курорте построили 6 дополнительных гостевых домиков, и благодаря этому среднее количество размещённых туристов в одном домике стало на 6 человек меньше, чем было в 2023 году. В 2025 году построили ещё 6 домиков, после чего среднее число туристов в домике сократилось ещё на 5 человек по сравнению с показателем 2024 года.

Сколько туристов побывало в «Простоквашино» в 2025 году? Если задача имеет несколько верных ответов, укажите их сумму. Если задача не имеет ни одного верного ответа или бесконечно много таковых, запишите в ответ число 0.

Answer: 3960

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Обозначим количество туристов, приезжавших в один год из перечисленных (то есть, согласно условию, в каждый из них) за t , а количество домиков на территории в 2023 году за d . Среднее

количество домиков в 2023 году равно $\frac{t}{d}$, в 2024 году равно $\frac{t}{d+5}$, а в 2025 году равно $\frac{t}{d+10}$.

Тогда из условия имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{t}{d+5} + 6 = \frac{t}{d} \\ \frac{t}{d+10} + 11 = \frac{t}{d} \end{cases}$$

Домножим первое выражение на положительную величину $d(d+5)$ и получим $dt+6d(d+5) = dt+5t$, что упрощается до $6d(d+5) = 5t$. Аналогично из второго уравнения получаем $11d(d+10) = 10t$. Домножая первое из этих двух условий на 2, имеем $12d(d+5) = 10t = 11d(d+10)$, откуда имеем $12(d+5) = 11(d+10)$. Решая это простое линейное уравнение получаем единственное решение $d = 60$. Откуда $t = 6d(d+5)/5 = \frac{6 \cdot 60 \cdot 65}{5} = 3300$.

Task 2.

1. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 30 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 210

2. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 36 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 306

3. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 24 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 132

4. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 40 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 380

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Выберем человека (пусть его зовут A), сделавшего наименьшее число (k) рукопожатий. Тогда все остальные 29 человек, кроме A , можно разбить на 2 группы: в первой группе будут k людей, которые пожали руку A (каждый из них сделал не менее k рукопожатий), а во второй – $29 - k$ людей, кому A не пожал руку. Согласно условию, все люди из второй группы должны пожать руки друг другу ($\frac{1}{2}(29 - k)(28 - k)$ рукопожатий), иначе двое не пожавших друг другу руки вместе с A образуют тройку людей без рукопожатий, что исключено условием задачи. Итак, общее число рукопожатий не меньше чем

$$\frac{1}{2}(k + k^2 + (29 - k)(28 - k)) = k^2 - 28k + 406 = (k - 14)^2 + 210 \geq 210$$

Равенство достигается, если разбить все 30 человек на две равные группы, в каждой из которых все пожмут друг другу руки, при этом между группами рукопожатий не будет.

Task 3. В условиях всех 4-х вариантов этой задачи допущена одна и та же ошибка: указанное 10-значное число в 6 раз больше задуманного. Ответы на некорректно сформулированную задачу не проверялись и не учитывались при формировании баллов.

1. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2719997280. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 136789

2. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2319997680. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 123689

3. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2159997840. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 123489

4. Андрей выбрал 6 различных ненулевых цифр и выписал на доску все возможные 6-значные числа, переставляя выбранные цифры между собой. После этого Андрей сложил все эти числа и получил 2799997200. Какое наименьшее число могло быть выписано Андреем на доску?

Answer: 146789

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

(число 2719997280 в условии заменено на $2719997280 : 6 = 453332880$)

Пусть число, записанное Андреем, равно $x = \overline{abcdef} = 10^5 \cdot a + 10^4 \cdot b + 10^3 \cdot c + 10^2 \cdot d + 10 \cdot e + f$, тогда сумма всех чисел, получаемых из него перестановкой цифр, равна $5! \cdot (a + b + c + d + e + f) \cdot 111111 = 453332880$, откуда $a + b + c + d + e + f = 34$. Чтобы число x было наименьшим, его цифры должны быть расположены в порядке возрастания слева направо. Полагая $a = 1$, получаем $b + c + d + e + f = 33$, тогда $b \geq 3$, иначе $c + d + e + f = 31$, но $6 + 7 + 8 + 9 = 30$ – отсюда $b \neq 2$. Далее $c + d + e + f = 30$, откуда и получаем $x = 136789$.

Task 4.

1. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 16$ и $a \geq 3$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 10

2. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 144$ и $a \geq 5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 26

3. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 48$ и $a \geq 4$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 16

4. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 24$ и $a \geq 5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 14

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть $x = b + c$. Тогда по неравенству о средних $bc \leq \frac{1}{4}x^2$. Значит, $16 = ab + bc + ca = ax + bc \leq ax + \frac{1}{4}x^2$, откуда $x^2 + 4ax - 64 \geq 0$. Рассмотрим это неравенство как квадратное относительно x . Множество его решений – это два луча, один из которых целиком лежит на отрицательной полуоси Ox (поскольку, согласно теореме Виета, произведение корней нашего квадратного трехчлена отрицательно), а потому его можно не рассматривать. По формуле корней квадратного уравнения получаем $x \geq -2a + 2\sqrt{a^2 + 16}$. Учитывая $x = b + c$, имеем $2a + b + c \geq 2\sqrt{a^2 + 16} \geq 2\sqrt{3^2 + 16} = 10$. Равенство достигается при $a = 3$, $b = c = 2$.

Task 5. Дано положительное целое k . Аня и Боря играют в игру на клетчатой доске 9×9 , делая ходы по очереди, начиная с Ани. Аня своим ходом ставит 0 в любую пустую клетку доски, а Боря за один свой ход ставит цифру 1 в k пустых клеток. Боря выигрывает, если после очередного его хода все суммы чисел в каждой строке и каждом столбце оказываются нечетными. При каком наименьшем k у Бори есть выигрышная стратегия?

Answer: 3

Решение (RUS). Докажем, что при $k = 3$ Боря выиграет. Выделим на доске три квадрата 3×3 , идущие по диагонали. Пусть каждым своим ходом Боря ставит единицы ладейной расстановкой в тот квадрат 3×3 , в который пошла Аня (т.е. Боря ставит единицы так, чтобы все единицы стояли бы в разных строках и разных столбцах данного квадрата 3×3). В противном случае Боря ставит единицы в любой квадрат 3×3 , в котором еще нет единиц. Ясно, что Боря выиграет через три хода (и после первого, и после второго ходов Ани у Бори получится сделать свой ход, поскольку двумя ходами Аня не сможет занять целиком строку или столбец квадрата 3×3).

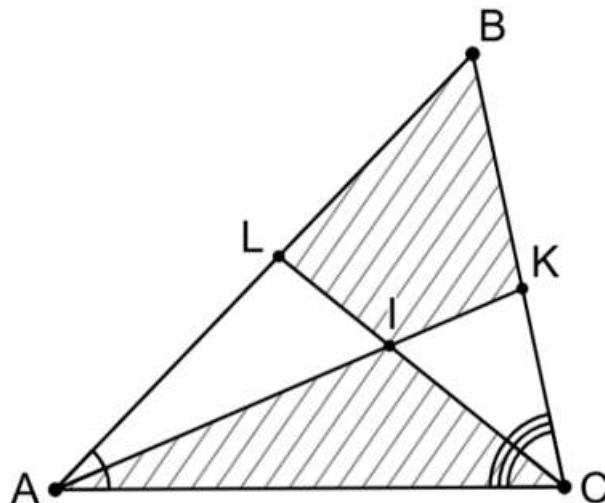
Докажем, что при $k = 1$ или 2 Боря не может выиграть. Заметим, что перед выигрывающим ходом Бори в точности 8 строк и 8 столбцов имеют нечетные суммы, а одна строка и один столбец – четные. Это означает, что выигрывающий ход Бори строго единственен. Поэтому в свой ход, предшествующий выигрывающему ходу Бори, Аня поставит 0 в нужную для Бори клетку, и тогда Боря не сможет выиграть.

Критерии оценивания:

- приведена верная стратегия, но доказательство отсутствует либо содержит значительные ошибки – 1 первичный балл;
- ответ неверен, но приведена плодотворная идея построения выигрышной стратегии – 2 первичных балла;
- дан верный ответ и предложена стратегия, но не доказано ее отсутствие для $k = 1, 2$, либо наоборот: доказано, что для $k = 1, 2$ стратегии нет, но не доказана стратегия для $k = 3$ – 3 первичных балла;
- дан верный ответ и доказана стратегия для $k = 3$, но доказательство отсутствия стратегии для $k = 1, 2$ отсутствует либо содержит ошибку – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 6. В треугольнике ABC выполнено $AC^2 = AB \cdot BC$, а биссектрисы AK и CL пересекаются в точке I . Докажите, что площадь четырехугольника $BKIL$ равна площади треугольника AIC .

Решение (RUS). Для удобства будем решать задачу «с конца», последовательно заменяя утверждения на равносильные. Равенство указанных в условии площадей равносильно равенству площадей треугольников ACL и ABK . Используя свойство отношения площадей треугольников с общей высотой и свойство биссектрисы треугольника, получим, что от площади треугольника ABC площадь треугольника ACL составляет часть, равную $\frac{AL}{AB} = \frac{AC}{AC+CB}$, а площадь треугольника ABK составляет часть, равную $\frac{BK}{BC} = \frac{BA}{BA+AC}$. Таким образом, требуемое равенство площадей равносильно условию $\frac{AC+BC}{AC} = \frac{AB+AC}{AB}$, то есть $1 + \frac{BC}{AC} = 1 + \frac{AC}{AB}$, которое, в свою очередь, равносильно $AC = \sqrt{AB \cdot BC}$, что верно по условию.



Критерии оценивания:

- использовано свойство биссектрисы, нет верного решения – 1 первичный балл;
- использовано свойство биссектрисы, найдена общая высота $\triangle ABC$ и $\triangle ALC$, нет верного решения – 2 первичных балла;
- приведено решение для частного случая (случаев), но использовано свойство биссектрисы, найдена общая высота $\triangle ABC$ и $\triangle ALC$ – 3 первичных балла;
- приведено решение, содержащее только незначительные ошибки в алгебраических преобразованиях при верности прочих рассуждений – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.