Фотоника

2022/23 учебный год

Заключительный этап

Предметный тур

Информатика. 8–11 класс

Задача VI.1.1.1. Бинарная криптовалюта (10 баллов)

Условие

Матвей занимается созданием новой криптовалюты. Основным отличием этой криптовалюты от уже встречающихся на рынке является бинарность. В проекте Матвея имеется два типа виртуальных монет, которые для краткости будем обозначать A и B. Отдельно ни одна из этих монет не имеет значения, однако пара монет, одна из которых имеет тип A, а другая тип B имеют в совокупности достаточно значимую цену.

На данный момент Матвей разработал протокол майнинга блоков, при помощи которого можно добывать эти монеты. При этом можно при одинаковых затратах энергии генерировать два вида блоков: блок первого вида содержит 3 монеты типа A и 2 монеты типа B, блок второго вида содержит 1 монету типа A и 4 монеты типа B.

У Матвея есть возможность сгенерировать n блоков любого вида. Само собой, он хочет, чтобы количество монет двух типов, полученных им, совпадало. Помогите ему определить количество блоков первого вида и количество блоков второго вида, которые ему нужно будет сгенерировать для этого. Общее число блоков должно быть равно n.

Формат входных данных

На вход подается одно натуральное число n — общее количество блоков, которые может сгенерировать Матвей. $1 \leqslant n \leqslant 10^{18}$. Число n кратно 4.

Формат выходных данных

Вывести два числа a и b через пробел. Число a соответствует количеству блоков первого вида, число b — количеству блоков второго вида, которые должен сгенерировать Матвей, так, чтобы количества монет разных типов совпали. Сумма чисел $a + b$ должна быть равна n.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
12

Стандартный вывод
9 3

Пояснения к примеру

Пусть имеется возможность сгенерировать 12 блоков. Тогда следует сгенерировать 9 блоков первого вида ($3 \cdot 9$ монет типа $A + 2 \cdot 9$ монет типа B) и 3 блока второго вида ($1 \cdot 3$ монеты типа $A + 4 \cdot 3$ монет типа B). Тогда количество монет типа A будет $27 + 3 = 30$, а количество монет типа B будет $18 + 12 = 30$.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

signed main(){
    int n;
    cin >> n;
    cout << 3 * n / 4 <<' '<< n / 4;
}
```

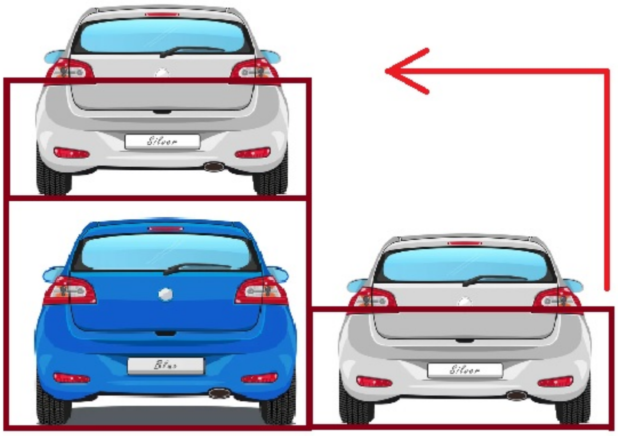
Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
val = int(input())
print(val // 4 * 3, val // 4)
```

Задача VI.1.1.2. Парковка автомобилей (15 баллов)

Условие

Начинающий инженер Вениамин работает над созданием стартапа для очень полезного дела. Он изобрел и пытается добиться массового использования устройства для парковки автомобилей в несколько этажей в рамках проекта «Удобная городская среда». Первый прототип Вениамина позволяет парковать автомобили в два этажа. Общая схема работы его устройства представлена на следующем рисунке.

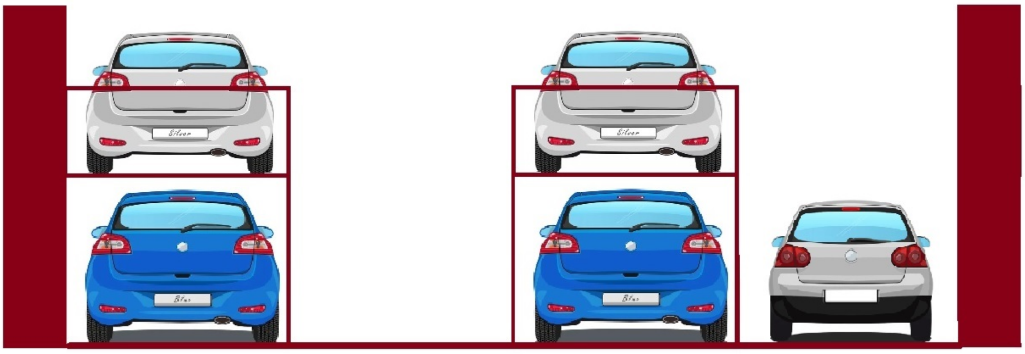


Если в кратце, то устройство работает так: автомобиль въезжает на специальную платформу, поле чего та передвигается сначала вверх, затем вправо или влево (предусмотрены оба варианта движения для одной и той же платформы). При этом движение может осуществляться вокруг стоящего ниже другого автомобиля. Спуск автомобиля производится в обратном порядке.

Очевидно, что при парковке при помощи этого устройства, у любого владельца автомобиля должна быть возможность в любой момент выехать со стоянки. Нижний автомобиль сможет это сделать когда угодно, а вот для маневра верхнего должно быть свободно одно из соседних мест слева или справа от этого устройства. После спуска верхнего автомобиля считается, что он сразу же уезжает со стоянки, то есть одним и тем же пустым местом могут пользоваться два находящихся на втором этаже автомобиля.

Для массового внедрения этого полезного устройства Вениамину необходимо доказать, что его устройство помогает увеличить вместимость обычных парковочных площадок. Для упрощения будем считать, что парковочные места расположены в один ряд и их количество равно n. Помогите Вениамину подсчитать для числа n какое наибольшее количество автомобилей можно разместить на n рядом расположенных местах с учетом требования свободы передвижения верхних автомобилей. При этом допускается, чтобы на некоторых местах автомобили парковались обычным одноэтажным способом. Справа и слева от ряда парковочных мест находятся высокие стены, то есть спуск автомобиля слева или справа от этого ряда невозможен.

Для примера рассмотрим случай $n = 4$. При обычном способе парковки в этом случае можно разместить четыре автомобиля, а при помощи устройства Вениамина — пять. Один из способов их размещения представлен на следующем рисунке.



Формат входных данных

На вход подается одно натуральное число n — количество расположенных рядом в одну линию парковочных мест. $1 \leqslant n \leqslant 100$.

Формат выходных данных

Вывести одно число — наибольшее возможное количество автомобилей, которое можно разместить на площадке длиной n при помощи устройства Вениамина с учетом возможности любого автомобиля в любой момент покинуть стоянку.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4

Стандартный вывод
5

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

signed main(){
    int n;
    cin >> n;
    cout << 4 * ((n - n % 3) / 3) + n % 3;
}
```

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
cnt = int(input())
mods = cnt % 3
```

```
ans = cnt // 3 * 4
if mods == 1:
    ans += 1
elif mods == 2:
    ans += 2
print(ans)
```

Задача VI.1.1.3. Преобразование координат (20 баллов)

Условие

Никита разрабатывает приложение с геолокацией некоторых неподвижных объектов. Известны координаты этих объектов в одной из общеизвестных систем координат. Эти координаты целочисленные. Можно считать, что все происходит на плоскости. Для удобства обработки, Никита решил ввести собственную систему кординат так, чтобы выполнялись следующие условия:

- единичный квадрат в этой новой системе имел как можно больший размер относительно старой системы координат, при этом все линии новой координатной сетки должны быть параллельны аналогичным линиям старой;
- все объекты, которые должны быть обработаны в приложении, должны иметь в новой системе координат так же целочисленные координаты.

Требуется по списку координат объектов в старой системе определить сторону единичного квадрата для новой системы так, чтобы указанные выше условия выполнялись. Начала координат у старой и новой систем могут не совпадать.

Формат входных данных

В первой строке содержится одно число n — количество объектов, координаты которых имеют интерес для приложения.

$2 \leqslant n \leqslant 5000$. В следующих n строках содержатся координаты объектов x_i, y_i в старой системе коодинат. Все координаты целочисленны и находятся в пределах от -10^9 до 10^9 включительно. Каждая пара координат записана в своей строке.

Формат выходных данных

Вывести сторону наибольшего относительно старых коодинат единичного квадрата для новой системы координат такого, что координаты всех объектов и в новой системе будут целыми.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4 -4 -1 5 5 -1 5 -1 -7

Стандартный вывод
3

Пример №2

Стандартный ввод
2 0 0 2 3

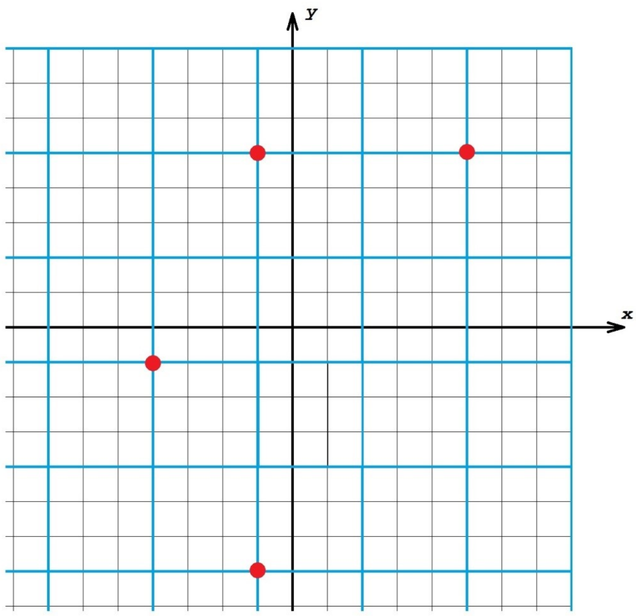
Стандартный вывод
1

Пример №3

Стандартный ввод
2 0 0 0 7

Стандартный вывод
7

Пояснение к примеру №1



На рисунке представлено множество точек из примера 1. Старая система координат изображена черными линиями, новая система — синими. Видно, что выделенные точки располагаются в узлах новой сетки, единичный квадрат которой в 3 раза больше чем единичный квадрат исходной сетки. Больше чем 3 размер новой сетки сделать нельзя.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define sz(a) (int)a.size()
#define pb push_back
#define all(a) a.begin(), a.end()
#define for0(i, n) for(int i = 0; i < n; i++)
#define int long long
using namespace std;
typedef vector<int> vi;

signed main(){
    int n;
    cin >> n;
    vi x(n), y(n);
    for0(i, n){
        cin >> x[i] >> y[i];
    }
    sort(all(x));
    sort(all(y));

    int ans = 0;
    for(int i = 1; i < n; i++){
        ans = __gcd(ans, x[i] - x[i - 1]);
```

```
        ans = __gcd(ans, y[i] - y[i - 1]);
    }
    cout << ans;
}
```

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
import math
n = int(input())
dx = []
dy = []
for i in range(n):
    a, b = list(map(int, input().split()))
    dx.append(a)
    dy.append(b)
gcd_x = 0
gcd_y = 0
for i in range(n):
    for j in range(i + 1, n):
        delta_x = abs(dx[i] - dx[j])
        delta_y = abs(dy[i] - dy[j])
        gcd_x = math.gcd(delta_x, gcd_x)
        gcd_y = math.gcd(delta_y, gcd_y)
print(math.gcd(gcd_x, gcd_y))
```

Задача VI.1.1.4. Благоустройство парка (25 баллов)

Условие

Муниципалитет города планирует благоустройство парка. В его центре планируется разбить клумбу с цветами. Клумба будет иметь прямоугольную форму и состоять из n рядов по m лунок в каждом ряду. В эти лунки планируется высаживать каждый год однолетние цветы. По задумке главного архитектора Лаврентия Борисовича, на прямоугольной клумбе главной доминантой должны выделяться большие красные флоксы — символ города. Он считает, что эти флоксы должны образовывать свой прямоугольник внутри клумбы, при этом их количество каждый год должно быть одним и тем же (пока он не решил каким). В противовес идее неизменности количества флоксов, Лаврентий Борисович считает, что ежегодно расположение прямоугольника из красных цветов или его пропорции должны изменяться.

Теперь требуется определить количество высаживаемых ежегодно флоксов k так, чтобы количество вариантов расположения прямоугольника из k лунок внутри клумбы $n \times m$ было наибольшим возможным.

Формат входных данных

В одной строке на вход подаются два натуральных числа через пробел n и m — размеры клумбы. Каждое из этих чисел находится в пределах от 1 до 1000.

Формат выходных данных

В первую строку вывести число k — количество флоксов такое, что число способов num разместить прямоугольник из k флоксов внутри клумбы $n \times m$ было наибольшим возможным. Во вторую строку вывести само это число способов num. Два варианта размещения прямоугольника из k флоксов различны, если в одном из них есть лунка, где флокс посажен, а в другом в этой лунке флокс не посажен. Если есть два или более различных k, дающих один и тот же максимальный ответ, вывести наибольший из них, что даст возможность жителям наслаждаться большим числом цветущих флоксов.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`6 6`

Стандартный вывод
`4` `61`

Пояснения к примеру

Для клумбы 6×6:

- для $k = 1$ имеется 36 способов разместить внутри прямоугольник 1×1, всего 36 вариантов;
- для $k = 2$ имеется 30 способов разместить внутри прямоугольник 1×2 и еще 30 способов разместить внутри прямоугольник 2×1, всего 60 вариантов;
- для $k = 3$ имеется 24 способа разместить внутри прямоугольник 1×3 и еще 24 способа разместить внутри прямоугольник 3×1, всего 48 вариантов;
- для $k = 4$ имеется 18 способов разместить внутри прямоугольник 1×4, 25 способов разместить внутри квадрат 2×2 и еще 18 способов разместить внутри прямоугольник 4×1, всего 61 вариант;
- для $k = 5$ имеется 12 способов разместить внутри прямоугольник 1×5 и еще 12 способов разместить внутри прямоугольник 5×1, всего 24 варианта;
- для $k = 6$ имеется 6 способов разместить внутри прямоугольник 1×6, 20 способов разместить внутри прямоугольник 2×3, 20 способов разместить внутри прямоугольник 3×2 и еще 6 способов разместить внутри прямоугольник 6×1, всего 52 варианта;

  ...
- для $k = 12$ имеется 5 способов разместить внутри прямоугольник 2×6, 12 способов разместить внутри прямоугольник 3×4, 12 способов разместить внутри прямоугольник 4×3 и еще 5 способов разместить внутри прямоугольник 6×2, всего 34 варианта;

  ...
- для $k = 36$ имеется 1 способ разместить внутри квадрат 6×6, всего 1 вариант.

В итоге, самое большое количество вариантов даст случай $k = 4$. Число таких вариантов равно 61.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;

signed main(){
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    int mx = 0, ans;
    for(int i = 1; i <= 10000; i++){ // 10000 !
        int tsum = 0;
        for(int j = 1; j * j <= i; j++){
            if(i % j == 0){
                int a = j;
                int b = i / j;
                if(n - a + 1 > 0 && m - b + 1 > 0)
                    tsum += (n - a + 1) * (m - b + 1);
                if(a != b && n - b + 1 > 0 && m - a + 1 > 0)
                    tsum += (n - b + 1) * (m - a + 1);
            }
        }
        if(tsum >= mx){
            mx = tsum;
            ans = i;
        }
    }
    cout << ans<<"\n"<<mx;
}
```

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
n, m = map(int, input().split())
cnt = [0] * (n * m + 1)
for i in range(1, n + 1):
    for j in range(1, m + 1):
        dy = n - i + 1
        dx = m - j + 1
        cnt[i * j] += dx * dy
maxi = -1
ans = 1
for i in range(1, n * m + 1):
    if cnt[i] >= maxi:
        maxi = cnt[i]
        ans = i
print(ans)
print(maxi)
```

Задача VI.1.1.5. Актуальный маршрут (30 баллов)

Условие

Иннокентий разрабатывает городское мобильное приложение «Актуальный маршрут». Оно поможет найти самый быстрый способ добраться городским транспортом из пункта A в пункт B с учетом периодичности движения транспортных средств. В городе имеется n маршрутов движения транспорта (автобусов, троллейбусов, трамваев и т. п.) Для каждого маршрута известно количество остановок на нем k_i и их порядок внутри этого маршрута. Для упрощения будем считать, что транспортные средства движутся по маршруту строго периодично следующим образом: утром в момент времени 0 на каждый маршрут с начальной его остановки выходит одно транспортное средство. Каждый перегон между остановками оно проходит за одну единицу времени. Таким образом, в последний пункт маршрута оно приходит в момент времени $k_i - 1$ и ровно в этот момент на данный маршрут (на его начальную остановку) выходит новое транспортное средство с теми же характеристиками. Такая периодичность на этом маршруте поддерживается в течение всего дня. Таким образом, на каждую остановку маршрута один раз в $k_i - 1$ моментов времени приходит ровно одно транспортное средство. Начальная и конечная остановки маршрута могут не совпадать, но могут и совпадать. Если маршрут не предусматривает обратного движения, то в обратную сторону по этому маршруту транспорт не идет (после достижения конечной остановки он уходит в депо).

Хорошо известен дискретный характер движения на городском транспорте: если ты не успел на текущий автобус, то следующий может прийти на остановку только через определенное время и весь запланированный ранее маршрут может сбиться. То есть, при необходимости попасть из пункта A в пункт B городским транспортом необходимо при планировании маршрута учитывать момент времени выхода пассажира на остановку. Приложение Иннокентия и должно помочь в выборе такого маршрута.

Заданы маршруты, проходящие по городу, пункты A — начальная остановка и B — конечная остановка, куда нужно попасть. Кроме того задано время t_{start} выхода пассажира на остановку пункта A. Необходимо по этим данным найти самое маленькое время t_{fin} в которое пассажир сможет оказаться на остановке B с учетом периодичности движения транспортных средств на маршрутах.

Формат входных данных

В первой строке заданы два натуральных числа через пробел: $n \leqslant 100$ — количество маршрутов в городе и $m \leqslant 100$ — общее количество остановок (некоторые могут и не обслуживаться ни одним маршрутом).

В следующих n строках заданы сами эти маршруты в следующем формате: первым указано число $1 \leqslant k_i \leqslant 101$ — количество остановок на маршруте, затем следуют k_i чисел a_j через пробел — номера остановок в том порядке, в котором они следуют в маршруте. Остановки на одном маршруте могут повторяться. $1 \leqslant a_j \leqslant 100$.

После описания маршрутов в отдельной строке следуют три числа через пробел A — стартовая остановка, B — целевая остановка и t_{start} — момент появления пассажира на остановке A. На любой остановке он может сесть на проходящее транспортное средство в любой момент, не превосходящий момента появления пассажира на остановке. Все действия (посадка, высадка, пересадка) выполняются мгновенно. $1 \leqslant A, B, \leqslant 100$, $0 \leqslant t_{start} \leqslant 10000$.

Формат выходных данных

Вывести минимальное возможное время приезда t_{fin} пассажира в пункт B с учетом периодичности движения транспортных средств на маршрутах. Если из пункта

A в пункт B данными маршрутами добраться нельзя — вывести «-1».

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
6 16 7 1 2 3 4 8 12 16 5 8 7 11 15 14 8 2 6 7 8 12 11 15 16 8 14 10 11 7 6 5 9 10 4 14 13 9 14 5 16 11 6 1 5 1 11 4

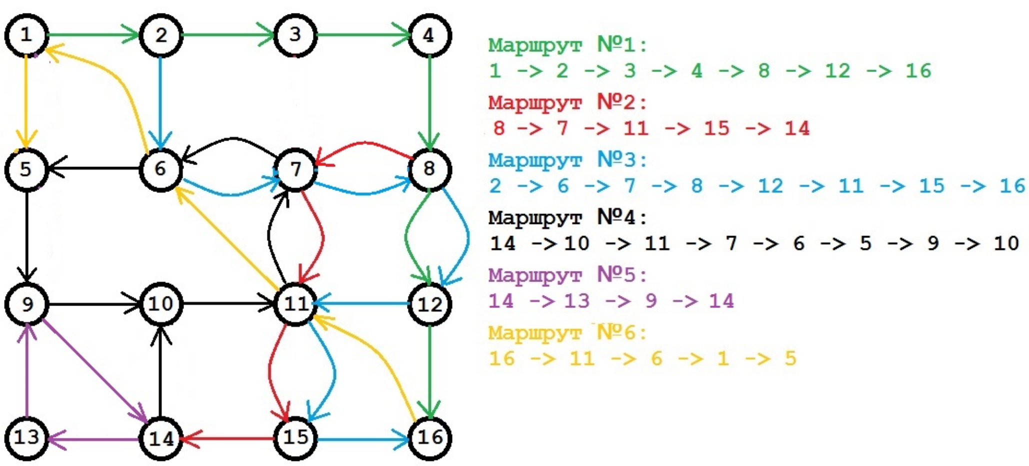
Стандартный вывод
10

Пример №2

Стандартный ввод
6 16 7 1 2 3 4 8 12 16 5 8 7 11 15 14 8 2 6 7 8 12 11 15 16 8 14 10 11 7 6 5 9 10 4 14 13 9 14 5 16 11 6 1 5 1 11 3

Стандартный вывод
9

Пояснения к примеру



Рассмотрим рисунок с картой маршрутов. Допустим, мы пришли в момент времени 4 на остановку 1 и хотим уехать на остановку 11. С остановки 1 в момент времени 6 мы выезжаем на маршруте №1. Мы можем на нем доехать до остановки 8 в момент времени 10 и далее дождаться маршрута №2 в момент времени 12. Тогда на остановку 11 попадем в момент времени 14. Но можно попробовать успеть быстрее: выйти из маршрута №1на остановке 2 в момент времени 7. В этот момент с данной остановки отправится очередной маршрут №3, который прибудет на остановку 7 в момент 9. И тогда мы успеваем на предыдущий автобус №3, который как раз проходит здесь в момент 9. На нем мы попадем в пункт 11 в момент времени 10, что и будет ответом.

Если же мы придём на остановку 1 в момент 3, то успеваем на маршрут №6, который приходит на эту остановку как раз в момент времени 3. Тогда на нем мы попадем в пункт 5 в момент времени 4. Подождем здесь маршрут №4, который подходит в пункт 5 в момент времени 5. На нем проедем до конечной остановки 10. Там мы окажемся в момент времени 7. В этот же момент из 14 выедет следующий маршрут №4, который в 10 прибудет в момент 8, и на нем в пункт 11 попадаем в момент 9.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define sz(a) (int)a.size()
#define pb push_back
#define all(a) a.begin(), a.end()
#define for0(i, n) for(int i = 0; i < n; i++)
#define for1(i, n) for(int i = 1; i <= n; i++)
#define x first
#define y second
#define int long long

using namespace std;

typedef pair<int, int> pii;
typedef vector<int> vi;
typedef vector<vector<int> > vvi;

const int inf = 1e9;
struct per{
    int to, mod, M, num;
};

signed main(){

    int n, m;
    cin >> n >> m;
    vvi v(n);
    for0(i, n){
        int k;
        cin >> k;
        for0(j, k){
            int a;
            cin >> a;
            v[i].pb(a);
        }
    }
```

```cpp

    int A, B, tst;
    cin >> A >> B >> tst;

    vector<vector<per> > G(m + 1);
    for0(u, n){
        for0(i, sz(v[u]) - 1){
            per a = {v[u][i + 1], i, sz(v[u]) - 1, u + 1};
            G[v[u][i]].pb(a);
        }
    }

    vi d(m + 1, inf), used(m + 1, 0), numm(m + 1, -1);
    d[A] = tst;

    for0(u, m){
        int mn = inf, pos = 0;
        for0(i, m + 1)
            if(!used[i] && d[i] < mn){
                mn = d[i];
                pos = i;
            }

        used[pos] = 1;
        for(auto el : G[pos]){
            int tmod = d[pos] % el.M;

            if(tmod <= el.mod){
                if(d[el.to] > d[pos] + el.mod - tmod + 1){
                    d[el.to] = d[pos] + el.mod - tmod + 1;
                    numm[el.to] = el.num;
                }
            }

            else{
                if(d[el.to] > d[pos] + el.mod + el.M - tmod + 1){
                    d[el.to] = d[pos] + el.mod + el.M - tmod + 1;
                    numm[el.to] = el.num;
                }
            }
        }
    }
    if(d[B] < inf)
        cout << d[B];
    else
        cout << -1;
}
```

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
n, m = map(int, input().split())
paths = []
for i in range(n):
    tmp = list(map(int, input().split()))
    paths.append(tmp)
s, f, t = map(int, input().split())
min_time = [1000000000] * (200)
min_time[s] = t
used = [False] * (200)
flag = True
```

```
while flag:
    used[s] = True
    for path in paths:
        for i in range(1, path[0]):
            if path[i] == s:
                cur_time = min_time[s]
                x = path[0] - 1
                next_time = (cur_time - (i - 1) + x - 1) // x * x + i - 1
                min_time[path[i + 1]] = min(min_time[path[i + 1]], next_time + 1)

    s = -1
    mini = 1000000000
    for i in range(1, m + 1):
        if not used[i] and min_time[i] < mini:
            mini = min_time[i]
            s = i
    if s == -1:
        flag = False
if min_time[f] == 1000000000:
    print(-1)
else:
    print(min_time[f])
```

Тестовые наборы для задач представленны по ссылке — https://disk.yandex.ru/d/xuoWFefIHHYN8w.

Физика. 8–9 классы

Задача VI.1.2.1. (14 баллов)

Темы: равноускоренное движение.

Условие

Один из способов измерить высоту здания с помощью барометра — это уронить его с крыши и измерить время падения.

Катя и Юля решили загадать друг другу высоты своих домов.

Оказалось, что время падения барометра с крыши Юлиного дома на секунду больше времени падения барометра с крыши дома Кати, а количество этажей отличается ровно в два раза.

Определите высоту дома Кати, если высота этажей в их домах одинакова и равна 3 метрам, а уровень крыши совпадает с потолком верхнего этажа.

Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2, также считайте, что уровень пола первого этажа совпадает с уровнем земли, а сопротивлением воздуха пренебрегите.

Решение

1. По условию задачи барометры уронили, а значит, их начальную скорость можно считать равной нулю:
$$V_{\text{нач}} = 0, \tag{VI.1.1}$$
где $V_{\text{нач}}$ — начальная скорость барометра.
2. Под действием силы тяжести и в отсутствие силы воздуха барометры будут двигаться с ускорением :
$$V(t) = 0 + g \cdot t \tag{VI.1.2}$$
$$h(t) = H - g \cdot \frac{t^2}{2}, \tag{VI.1.3}$$
где t — время падения барометра,
$V(t)$ — зависимость скорости падения барометра от времени,
$h(t)$ — зависимость координаты барометра, в этом случае измеряемая от уровня земли,
H — высота здания
3. Следующим этапом решения является установление связи между временами падения двух барометров. Если время падения барометра с крыши юлиного дома на 1 секунду больше, можно записать, что:
$$T_{\text{ю}} = T_{\text{к}} + 1\ \text{с}, \tag{VI.1.4}$$
где $T_{\text{ю}}$ — это время падения барометра с крыши Юлиного дома,
$T_{\text{к}}$ — время падения барометра с крыши дома Кати.

4. И между высотами зданий: дом, в котором живет Юля выше катиного в два раза:
$$H_{\text{ю}} = \frac{H_{\text{к}}}{2}, \tag{VI.1.5}$$
где $H_{\text{ю}}$ — это высота дома Юли,
$H_{\text{к}}$ — высота дома Кати.
5. Теперь учитывая то, что оба барометра оказались на уровне земли, можно записать ключевое равенство, связывающее высоты и времена падения:
$$H_{\text{ю}} - g \cdot \frac{T_{\text{ю}}^2}{2} = H_{\text{к}} - g \cdot \frac{T_{\text{к}}^2}{2} = 0 \tag{VI.1.6}$$
6. Подставляя в это равенство выражения VI.1.4 и VI.1.5, можно найти высоты домов и времена падения. Чтобы найти время падения барометра с дома Кати, можно сперва выразить $H_{\text{ю}}$ через $H_{\text{к}}$, а $T_{\text{ю}}$ через $T_{\text{к}}$:
$$2 \cdot H_{\text{к}} - g \cdot \frac{(T_{\text{к}} + 1)^2}{2} = H_{\text{к}} - g \cdot \frac{T_{\text{к}}^2}{2} = 0 \tag{VI.1.7}$$
7. Что после преобразования дает:
$$(T_{\text{к}} + 1)^2 = 2 \cdot T_{\text{к}}^2 \tag{VI.1.8}$$
$$T_{\text{к}} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4 \text{ с} \tag{VI.1.9}$$
8. Зная время падения барометра, несложно найти высоту дома:
$$H_{\text{к}} = g \cdot \frac{T_{\text{к}}^2}{2} \tag{VI.1.10}$$
$$H_{\text{к}} = 10 \text{ м/с}^2 \cdot 2,4 \text{ с}^2/2 \approx 29 \text{ м} \tag{VI.1.11}$$
9. В условии указано, что высота одного этажа равна 3 метрам, а значит, высота дома должна быть кратна 3 метрам. Ближайшее значение к $H_{\text{к}}$ равно:
$$H_{\text{к}} \approx 30 \text{ м} \tag{VI.1.12}$$

Следовательно, ответом на вопрос является высота дома 30 метров (10 этажей).

Ответ: 30 метров (10 этажей).

Критерии оценивания

1. Явно указано, что начальные скорости движения барометров можно считать равными нулю — 1 балл.
2. Явно указано, что на барометры действует исключительно сила тяжести, и что их ускорение равно ускорению свободного падения — 1 балл.
3. Выражена зависимость координаты барометра от времени падения — 3 балла.
4. Сформулирована или используется связь между временами падения барометров — 1 балл.
5. Сформулирована или используется связь между высотами домов — 1 балл.

6. Записаны выражения, связывающие времена падения барометров с высотами домов — 2 балла.
7. Решена система уравнений и найдено хотя бы одно время падения барометра или хотя бы одна высота дома — 2 балла.
8. Найдено численное значение высоты дома Кати — 2 балла (ставятся в дополнение к пункту 7 даже если найдена исключительно высота дома Кати).
9. Проведен анализ получившейся величины, высота дома округлена до 30 метров — 1 балл.

Задача VI.1.2.2. (14 баллов)

Темы: преобразование энергии.

Условие

В десятиэтажном доме модернизируют лифт: теперь 50% высвобождаемой энергии рекуперируется[1] и может быть использована повторно. Также была оптимизирована масса противовеса — теперь она совпадает со средней массой лифта[2].

Сделайте оценку того, за сколько лет окупится модернизация лифта на основе приведенных ниже статистических данных и обоснуйте ее.

Стоимость модернизации: 50 000 рублей.

Стоимость одного киловатт-часа: 6 рублей.

Масса лифта: 200 кг.

Масса противовеса: 320 кг.

Стандартная масса одного человека: 80 кг.

Максимальное количество пассажиров: 5 человек.

Среднее количество пассажиров: 3 человека.

Средняя разница между массой лифта[2] и массой противовеса: 120 кг.

Среднее количество поездок: 300 в каждую сторону в сутки.

Режим работы — низкая интенсивность[3].

Скорость движения лифта после разгона: 1 м/с.

Ускорение лифта: 0–0,8 м/с^2.

Ускорение свободного падения равным 10 м/с^2, а высоту одного этажа равной 3 метрам.

[1] Рекуперация (от *recuperatio* «обратное получение; возвращение») — вид электромагнитного торможения, при котором высвобождаемая механическая энергия преобразуется в электрическую и используется для последующей работы.

[2] Не обязательно пустого.

[3] Это значит, что очередей практически не бывает. При подъеме пассажиров лифт после высадки сразу возвращается на этаж, с которого его вызывают чаще всего, то есть, на первый этаж, а при вызове вниз лифт приезжает пустым и едет с пассажирами на первый этаж, не делая промежуточных остановок.

Решение

1. Первым делом необходимо определить, из чего состоит движение лифта между этажами, не важно с пассажирами или без:
   - сперва идет разгон лифта и противовеса в противоположные стороны, и на это требуется энергия $E_\text{к}$;
   - вторым этапом является движение лифта и противовеса с постоянной скоростью. В зависимости от того, куда движется центр масс потенциальная энергия — $E_\text{п}$ либо выделяется либо тратится;
   - затем происходит торможение лифта с противовесом и прибытие на этаж, при котором обратно выделяется энергия $E_\text{к}$.
2. Однако, будет неправильно считать, что при разгоне лифта тратится именно электрическая энергия, а при торможении выделяющаяся кинетическая энергия распределяется между выработкой электричества и выделением тепла.
3. С одной стороны, если масса лифта с пассажирами больше массы противовеса — он может двигаться вниз и без затрат электричества. В кинетическую энергию в этом случае будет преобразована часть потенциальной энергии лифта и пассажиров. То же самое произойдет и в случае подъема пустого или практически пустого лифта, при котором более тяжелый противовес будет двигаться вниз. Большая часть потенциальной энергии противовеса преобразуется в потенциальную энергию лифта, но часть оставшейся потенциальной энергии противовеса может быть преобразована в кинетическую энергию, и электричество не потребуется.
4. С другой стороны, если в целом лифт с противовесом как единая система движутся вверх, то кинетическая энергия, выделяемая на этапе торможения, может быть преобразована в потенциальную. То есть, последние метры лифт может проехать по инерции без затрат электричества.
5. Чтобы доказать возможность такого естественного разгона и торможения, следует оценить время, за которое система лифт-противовес может разогнаться/остановиться без использования моторов.
   В условии задачи указано, что меньше всего масса лифта отличается от массы противовеса при 1 или 2 пассажирах: на 40 кг, а значит, минимальное значение не скомпенсированной силы тяжести $F_\text{разн.мин.}$ равно:
   $$F_\text{разн.мин.} = |F_\text{тяж.лифт} - F_\text{тяж.прот.}| = \Delta M_\text{мин} \cdot g = 40\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 = 400\ \text{Н},$$
   где $F_\text{разн.мин.}$ — минимальное значение некомпенсированной силы тяжести,
   $F_\text{тяж.лифт}$ — сила тяжести, действующая на лифт,
   $F_\text{тяж.прот.}$ — сила тяжести, действующая на противовес,
   $\Delta M_\text{мин}$ — минимальная разность масс лифта и противовеса.
6. Под действием этой силы лифт с противовесом будут двигаться с ускорением, равным $a_\text{мин}$, равным:
   $$a_\text{мин} = \frac{F_\text{разн}}{M_\text{лифт. ср.} + M_\text{прот}} = \frac{400\ \text{Н}}{320\ \text{кг} + 320\ \text{кг}} \approx 0,6\ \text{м/с}^2,$$
   где $M_\text{лифт.ср}$ — средняя масса лифта, $M_\text{прот}$ — масса противовеса.
7. Зная минимальное ускорение нетрудно найти минимальное время tмин, за которое лифт разгонится или замедлится под действием силы тяжести:
   $$t_\text{мин} = \frac{V}{a_\text{мин}} = \frac{1\ \text{м/с}}{0,6\ \text{м/с}^2} = 1,6\ \text{с},$$

где V — скорость равномерного движения лифта.

8. Полученное нами минимальное значение времени разгона/торможения лифта под действием силы тяжести, равное 1,6 с очень мало, а значит, в большинстве случаев нет потребности в том, чтобы тратить электрическую энергию на разгон системы лифт-противовес при движении вниз, и нет потребности в какой-либо значительной степени использовать тормоза при окончании движения системы лифт-противовес вверх.
9. Перейдем к расчету затрачиваемой и высвобождаемой энергии.
   9.1. С учетом приведенных выше рассуждений можно считать, что при движении системы «лифт-противовес» вниз, энергия преобразуется следующим образом:
      - На первом этапе часть потенциальной энергии системы «лифт-противовес» преобразуется в кинетическую энергию $E_к$.
      - На втором этапе оставшаяся часть потенциальной энергии в размере $E_п - E_к$ преобразуется пополам в электрическую энергию и в тепловую энергию.
      - На третьем этапе кинетическая энергия преобразуется в равной степени в электрическую и тепловую.

      Таким образом, при движении системы «лифт-противовес» вниз в электрическую энергию преобразуется $E_{эл.выд.}$:

$$E_{эл.выд.} = 0,5 \cdot (E_п - E_к) + 0,5 \cdot E_к = 0,5 \cdot E_п,$$

      где $E_{эл.выд.}$ — выделенная при рекуперации электрическая энергия,
      $E_п$ — потенциальная энергия системы «лифт-противовес» в начале движения,
      $E_к$ — максимальное значение кинетической энергии системы «лифт-противовес».

   9.2. Аналогичным образом можно выразить и количество электрической энергии, затрачиваемой при движении системы «лифт-противовес» вверх:
      - На первом этапе тратится энергия $E_к$,
      - На втором этапе тратится энергия $E_п - E_к$,
      - На третьем этапе кинетическая энергия преобразуется в потенциальную, а электрическая не тратится.

      То есть, суммарный расход электрической энергии $E_{эл}$ равен:

$$E_{эл} = E_к + E_п - E_к = E_п.$$

10. Дальнейшие расчеты можно выполнить несколькими способами:
   А. Можно считать, что за сутки совершается 300 вызовов в каждую сторону, на которые лифт приезжает пустым и увозит в среднем 3 пассажиров (240 кг). То есть:
      – 300 раз лифт едет вверх пустым;
      – 300 раз лифт едет вниз со средней нагрузкой 240 кг;
      – 300 раз лифт едет вниз пустым;
      – 300 раз лифт едет вверх со средней нагрузкой 240 кг.

   Б. Можно считать, что за сутки лифт совершил по 300 поездок туда-обратно в каждую сторону с массой лифта (с учетом пассажиров) в среднем равной массе противовеса, но со средней разностью масс 120 кг. То есть,

   – 600 раз в среднем поднят груз 120 кг;
   – 600 раз в среднем спущен груз 120 кг.

11. С учетом того, что масса пустого лифта, так же, как и масса лифта с 3 пассажирами отличается от массы противовеса на 120 кг, вычисления, произведенные двумя этими способами, приведут к одинаковому ответу.
12. Определим среднюю высоту, на которую лифт опускает или поднимает пассажиров. В условии сказано, что дом десятиэтажный, а значит, считая что на всех этажах живет одинаковое количество человек, можно предположить, что в среднем лифт будет ездить на 5 этажей, то есть на высоту $h_{\text{ср}}$, равную:

$$h_{\text{ср}} = 5 \text{ этажей} \cdot 3 \text{ м/этаж} = 15 \text{ м}.$$

13. Из этого следует, что средняя работа по подъему 120 кг будет равна:

$$E_{\text{п}} = \Delta M \cdot g \cdot h_{\text{ср}} = 120 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 15 \text{ м} = 18000 \text{ Дж}.$$

То есть, за день будет затрачена общая энергия $E_{\text{з.общ.}}$, равная:

$$E_{\text{з.общ.}} = N_{\text{з}} \cdot E_{\text{п}} = 600 \text{ шт/день} \cdot 18\,000 \text{ Дж} = 10\,800\,000 \text{ Дж/день},$$

где N — число поездок, требующих затрат энергии.

14. А половина этой энергии будет ежедневно рекуперироваться при спусках:

$$E_{\text{рек.общ.}} = 0,5 \cdot E_{\text{з.общ.}} = \frac{10\,800\,000 \text{ Дж/день}}{2} = 5\,400\,000 \text{ Дж/день}.$$

15. Рассчитаем стоимость энергии, сэкономленной за день. Один киловатт-час равен:

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 1 \text{ кВт} \cdot 1 \text{ ч} = 1000 \text{ Вт} \cdot 3600 \text{ с} = 3\,600\,000 \text{ Дж}.$$

16. А значит, стоимость сэкономленной за день электроэнергии $W_{\text{д}}$ равна:

$$W_{\text{д}} = \frac{E_{\text{рек.общ.}}}{P} = \frac{5\,400\,000 \text{ Дж}}{6 \text{ руб/кВт} \cdot \text{ч}} = \frac{6 \text{ руб} \cdot 5\,400\,000 \text{ Дж}}{3\,600\,000 \text{ Дж}} = 9 \text{ руб/день},$$

где P — цена 1 кВт·ч.

17. Наконец, рассчитаем количество дней T за которое окупится модернизация:

$$T = \frac{S}{W_{\text{д}}} = \frac{50\,000 \text{ руб}}{9 \text{ руб/д}} = 15 \text{ лет}.$$

Ответ: модернизация лифта окупится за 15 лет.

Критерии оценивания

1. Записана формула для расчета потенциальной энергии в общем виде — 1 балл.
2. Указано, что в среднем лифт перевозит пассажиров на 5 этажей = 15 метров — 1 балл.
3. Указано, что каждая поездка состоит из двух частей, и в среднем за день происходит 600 поездок, во время которых электричество вырабатывается, и столько же, во время которых электричество тратится — 1 балл.

4. Указано (без обоснования), что энергия, выделяемая/потребляемая системой лифт-противовес при движении в одну сторону E равна $E = E_п + E_к - E_к$, где $E_п$ — изменение потенциальной энергии, а $E_к$ — значение кинетической энергии после разгона, и что кинетические энергии компенсируются — 2 балла (если указано что $E = E_п$ без сокращения $E_к$ эти баллы не ставятся).
5. Обосновано, почему $E_к$ сокращаются путем оценки времени разгона/торможения или другим способом показана возможность преобразования потенциальной энергии в кинетическую и обратно — 4 балла, если есть рассуждения без численной оценки — 2 балла (добавляются к 2 баллам из п. 4).
6. Получено формульное выражение для энергии, затрачиваемой/рекуперируемой за день — 1 балл.
7. Рассчитана энергия, затрачиваемая за день/рекуперируемая за день — 1 балл.
8. Выполнен перевод кВт·ч в Дж или наоборот — 1 балл.
9. Получена формула для оценки времени окупаемости модернизации — 1 балл.
10. Получена и округлена численная оценка времени окупаемости модернизации — 1 балл.

Примечание: если ученик не учел того, что разгон лифта, движущегося вниз может осуществляться за счет уменьшения его потенциальной энергии, а кинетическая энергия лифта, движущегося вверх, может напрямую использоваться для увеличения его потенциальной энергии и сделал расчет с учетом энергии, затрачиваемой на разгон и рекуперируемой при торможении — задача оценивается из 8 баллов, то есть не ставятся баллы за пункты 4 и 5, а в пунктах 6, 7, 8, 9, 10 альтернативные варианты формул и численных значений оцениваются без штрафа.

Задача VI.1.2.3. (24 баллов)

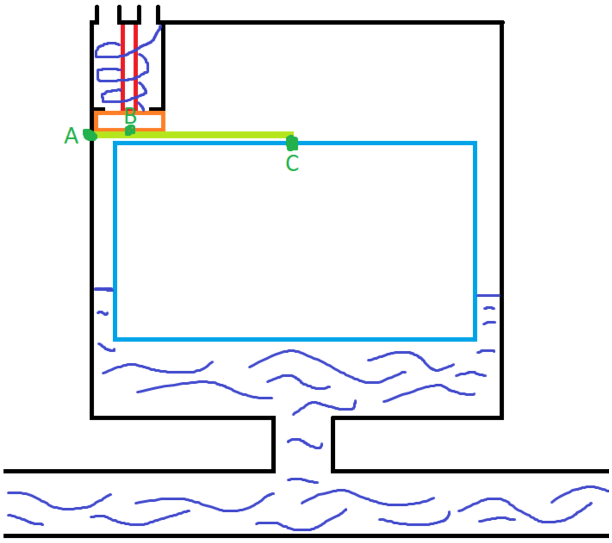
Темы: гидростатика.

Условие

Присутствие воздуха в системе отопления может приводить к нарушению ее работы. Для постепенного накопления и удаления пузырьков устанавливаются воздухоотводчики, состоящие из клапана, рычага и очень легкого поплавка (см. рисунок).

Когда воздухоотводчик наполнен воздухом, сжатая пружина с силой 3 Н сдвигает вниз резиновую мембрану диаметром 3 мм. При этом воздух выходит сквозь отверстие диаметром 2 мм до тех пор, пока вода не поднимет поплавок диаметром 5 см, и мембрана не прижмется обратно к отверстию (герметично). Определите на сколько сантиметров погружен поплавок в воду, в момент когда клапан закрылся, и на сколько он погружен в момент открытия клапана, если давление воды в 3,5 раза больше атмосферного давления 100 кПа.

Плотность воды считайте равной 1000 кг/м^3, расстояние $AB = 2$ мм, $BC = 8$ мм, а ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.



Решение

1. Для того, чтобы определить условия, при которых клапан открывается или закрывается, необходимо записать условие равновесия рычага.
   Для того, чтобы не учитывать силу реакции опоры со стороны корпуса воздухоотводчика, удобнее всего записать условие равновесия рычага относительно точки A.
2. Рассмотрим силы, действующие на рычаг:
   - в точке C к рычагу приложена сила $F_{\text{п}}$, действующая снизу вверх со стороны поплавка
   - в точке В к рычагу приложена сила $F_{\text{ст}}$, действующая сверху вниз со стороны стержня.
3. Чтобы выразить силу $F_{\text{п}}$, необходимо записать условие равновесия для поплавка.
   Снизу-вверх на него со стороны воды действует сила Архимеда F_a, а вниз действуют сила тяжести $F_{\text{т}}$ и сила реакции опоры со стороны стержня, равная по модулю $F_{\text{п}}$.
   По условию задачи поплавок очень легкий, а значит, условие равновесия поплавка выражается равенством: $F_a = F_{\text{п}}$.
4. Выразим силу Архимеда через площадь поплавка S и высоту его погруженной части H:
   $$F_a = \rho_{\text{в}} \cdot g \cdot S \cdot H = \frac{\rho_{\text{в}} \cdot g \cdot \pi \cdot D_{\text{п}}^2 \cdot H}{4},$$
   где $D_{\text{п}}$ — диаметр поплавка.
5. Теперь рассмотрим условие равновесия стержня с мембраной. Когда клапан закрыт на них действуют следующие силы:
   - сверху-вниз действует пружина с силой $F_{\text{упр}}$, $F_{\text{упр}} = 3$ Н,
   - также сверху вниз действует сила давления атмосферного воздуха $F_{\text{внеш}}$:
   $$F_{\text{внеш}} = P_{\text{атм}} \cdot S_{\text{отв}} = \frac{P_{\text{атм}} \cdot \pi \cdot D_{\text{отв}}^2}{4},$$

где $P_{\text{атм}}$ — атмосферное давление,
$S_{\text{отв}}$ — площадь отверстия,
$D_{\text{отв}}$ — диаметр отверстия.

- и сила реакции опоры $N_{\text{к}}$, действующая на мембрану со стороны части корпуса с отверстием (к которому прижимается мембрана). В моменты открытия и закрытия эта сила равна нулю (мембрана еле прикасается к корпусу) $N_{\text{к}} = 0$.
- снизу-вверх на стержень с мембраной действует сила реакции опоры со стороны стержня, равная по модулю $F_{\text{ст}}$,
- а также сила давления воздуха $F_{\text{внутр}}$, находящегося внутри воздухоотводчика, равная

$$F_{\text{внутр}} = P_{\text{внутр}} \cdot S_{\text{мембр}} = \frac{P_{\text{внутр}} \cdot \pi \cdot D^2_{\text{мембр}}}{4},$$

где $P_{\text{внутр}}$ — давление внутри воздухоотводчика,
$S_{\text{мембр}}$ — площадь мембраны,
$D_{\text{мембр}}$ — диаметр мембраны.

6. Выразим силу взаимодействия стержня с рычагом через условие равновесия стержня с мембраной в момент открытия или закрытия клапана.

$$F_{\text{ст}} = F_{\text{упр}} + F_{\text{внеш}} - F_{\text{внутр}}.$$

7. А теперь подставим это выражение в условие равновесия рычага:

$$F_a \cdot L_{AC} = (F_{\text{упр}} + F_{\text{внеш}} - F_{\text{внутр}}) \cdot L_{AB},$$

где L_{AC} — длина отрезка AC, а L_{AB} — длина отрезка AB.

8. И преобразуем получившееся равенство используя величины из условия:

$$\frac{\rho_{\text{в}} \cdot g \cdot \pi \cdot D^2_{\text{п}} \cdot H \cdot L_{AC}}{4} = \left(F_{\text{упр}} + \frac{P_{\text{атм}} \cdot \pi \cdot D^2_{\text{отв}}}{4} - \frac{P_{\text{внутр}} \cdot \pi \cdot D^2_{\text{мембр}}}{4}\right) \cdot L_{AB}.$$

$$\frac{\rho_{\text{в}} \cdot g \cdot \pi \cdot D^2_{\text{п}} \cdot H \cdot L_{AC}}{L_{AB}} = 4 \cdot F_{\text{упр}} + P_{\text{атм}} \cdot \pi \cdot D^2_{\text{отв}} - P_{\text{внутр}} \cdot \pi \cdot D^2_{\text{мембр}}.$$

$$1000\ \text{кг/м}^3\ \cdot 10\ \text{м/с}^2\ \cdot 3,14 \cdot 5\ \text{см}^2\ \cdot H \cdot \left(\frac{2\ \text{мм} + 8\ \text{мм}}{2\ \text{мм}}\right) =$$

$$= 4 \cdot 3\ \text{Н} + 100\ \text{кПа} \cdot 3,14 \cdot 2\ \text{мм}^2 - P_{\text{внутр}} \cdot 3,14 \cdot 3\ \text{мм}^2.$$

9. В получившемся выражении кроме глубины погружения H неизвестно значение внутреннего давления воздуха. Определим его для случая, когда клапан только закрылся и когда вот-вот откроется.

   - Когда клапан открыт, воздух внутри корпуса сообщается с атмосферным воздухом, а значит, давление внутри корпуса и в момент, когда клапан только закрылся, равно атмосферному:

   $$P_{\text{внутр1}} = 100\ \text{кПа},$$

   где $P_{\text{внутр1}}$ — давление воздуха внутри корпуса, когда клапан только закрылся.

- Если же клапан закрыт долгое время — необходимо рассмотреть условие равновесия воды в воздухоотводчике — ее давление равно $P_{\text{воды}}$, а значит, и на ее поверхность должно действовать такое же давление. То есть,

$$P_{\text{внутр2}} = 350 \text{ кПа},$$

где $P_{\text{внутр2}}$ — давление воздуха внутри корпуса перед тем, когда клапан откроется.

Подставив эти значения в получившееся численное выражение и переведя все величины в единицы СИ получим:

- Для случая, когда клапан только закрылся:

$$1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 3,14 \cdot 5 \text{ см}^2 \cdot H \cdot \left(\frac{2 \text{ мм} + 8 \text{ мм}}{2 \text{ мм}}\right) =$$

$$= 4 \cdot 3 \text{ Н} + 100 \text{ кПа} \cdot 3,14 \cdot 2 \text{ мм}^2 - 100 \text{ кПа} \cdot 3,14 \cdot 3 \text{ мм}^2,$$

что после упрощения дает:

$$1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 3,14 \cdot 5 \text{ см}^2 \cdot H \cdot \left(\frac{2 \text{ мм} + 8 \text{ мм}}{2 \text{ мм}}\right) =$$

$$= 4 \cdot 3 \text{ Н} + 100 \text{ кПа} \cdot 3,14 \cdot (-3 \text{ мм}^2 + 2 \text{ мм}^2)$$

и далее:

$$3,14 \cdot 25 \text{ Н/м} \cdot 5 \cdot H = 12 \text{ Н} - 3,14 \cdot 0,5 \text{ Н},$$

откуда $H = 2,7$ см.

- Для случая, когда клапан вот-вот откроется:

$$1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 3,14 \cdot 5 \text{ см}^2 \cdot H \cdot \left(\frac{2 \text{ мм} + 8 \text{ мм}}{2 \text{ мм}}\right) =$$

$$= 4 \cdot 3 \text{ Н} + 100 \text{ кПа} \cdot 3,14 \cdot 2 \text{ мм}^2 - 350 \text{ кПа} \cdot 3,14 \cdot 3 \text{ мм}^2,$$

что после упрощения дает:

$$1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 3,14 \cdot 5 \text{ см}^2 \cdot H \cdot \left(\frac{2 \text{ мм} + 8 \text{ мм}}{2 \text{ мм}}\right) =$$

$$= 4 \cdot 3 \text{ Н} + 100 \text{ кПа} \cdot 3,14 \cdot (-350 \text{ кПа}/100 \text{ кПа} \cdot 3 \text{ мм}^2 + 2 \text{ мм}^2)$$

и далее:

$$3,14 \cdot 25 \text{ Н/м} \cdot 5 \cdot H = 12 \text{ Н} - 3,14 \cdot 2,75 \text{ Н},$$

откуда $H = 0,9$ см.

Ответ: 2,7 см; 0,9 см.

Критерии оценивания

1. Записана формула для силы Архимеда, действующей на поплавок — 1 балл.
2. В хотя бы одной физической формуле применена формула для площади круга (для поплавка/отверстия/мембраны) — 1 балл.

3. Записано условие равновесия рычага и правильно указано действие сил — 2 балла.
4. Сформулировано или изображено условие равновесия поплавка — 2 балла.
5. Указаны силы давления, действующие на мембрану с двух сторон — 3 балла.
6. Получено выражение для силы, действующей на рычаг в точке В с учетом того, что давление воздуха может не совпадать с атмосферным — 4 балла.
7. Приведено объяснение того, почему, когда клапан только закрылся, давление воздуха внутри корпуса равно атмосферному — 2 балла (1 балл если указано что давление внутри равно атмосферному с указанием на то, что только в одном из случаев, но без объяснения почему).
8. Приведено объяснение того, почему перед тем, как клапан откроется, давление воздуха внутри корпуса равно давлению воды — 3 балла (2 балла, если указано, что давление внутри равно 3,5 атм с указанием на то, что только в одном из случаев, но без объяснения почему).
9. Получено выражение, связывающее H с известными величинам — 2 балла.
10. Найдены численные значения для H — по 2 балла за каждое (по 1 баллу, если ошибка в вычислениях в переводе в единицы СИ).

Задача VI.1.2.4. (24 баллов)

Темы: тепловые явления.

Условие

Для обогрева загородного дома используется переключаемая система отопления. Во время осенних каникул, когда температура на улице была примерно равна 0 °C, котел нагревал воду в баке до 65 °C, а насос закачивал ее в трубу со скоростью 0,5 м/с. Эта труба соединена с системой теплого пола, откуда вода возвращалась в бак с конечной температурой 60 °C.

На зимних каникулах было очень холодно, и система отопления была включена по-другому: температуру в баке установили равной 75 °C, а кроме системы теплого пола открыли кран на трубе, ведущей к батареям. Когда температура в доме вернулась к комфортной величине, оказалось, что температура воды, возвращающейся в бак из обеих труб равна 65 °C.

Определите, чему была равна температура на улице во время зимних каникул, если зимой скорость воды, вытекающей из бака, была равна 0,3 м/с?

Диаметры труб одинаковы и равны 2 см. Температура в доме во время всех каникул поддерживалась на уровне 20 °C.

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C) мощность теплообмена между телами пропорциональна разности их температур.

Решение

1. В условии задачи сказано, что мощность теплообмена пропорциональна разности температур, а значит, если зимой было X °C ниже нуля, то по сравнению

с осенью дом отдавал тепло больше в

$$N = \frac{20\ ^\circ\mathrm{C} + X\ ^\circ\mathrm{C}}{20\ ^\circ\mathrm{C} + 0\ ^\circ\mathrm{C}}\ \text{раз}$$

(так как осенью разность температур между домом и улицей была 20 °C, а зимой стала $20 + X$).

2. Теперь определим, сколько тепла отдавали батареи и теплый пол.
   В первую очередь, заметим, что и в батареи, и в теплый пол вели одинаковые трубы, в них втекала вода одинаковой температуры и вытекала, остыв на одинаковую величину.
   Это значит, что количество теплоты, отдаваемое в единицу времени теплым полом $N_{\text{т.з.}}$ равно мощности батарей $N_{\text{б.з.}}$:
   $$N_{\text{т.з.}} = N_{\text{б.з.}}.$$
3. А значит, общая мощность обогрева дома зимой $N_{\text{общ.з.}}$ равна удвоенной мощности теплого пола в зимнем режиме:
   $$N_{\text{общ.з.}} = 2 \cdot N_{\text{т.з.}}.$$
4. Сравним мощность теплого пола зимой и осенью.
   Осенью вода остывала на
   $$\Delta T_{\text{ос}} = T_{\text{нач.ос.}} - T_{\text{кон.ос.}} = 65\ ^\circ\mathrm{C} - 60\ ^\circ\mathrm{C} = 5\ ^\circ\mathrm{C},$$
   где $T_{\text{нач.ос.}}$ — температура, с которой вода втекала осенью, а $T_{\text{кон.ос.}}$ — температура, с которой осенью вода вытекала.
5. То есть, вода текла со скоростью $V_{\text{ос}} = 0,5$ м/с и каждый литр воды остывал на 5 °C.
6. Зимой же вода остывала на:
   $$\Delta T_{\text{з}} = T_{\text{нач.з.}} - T_{\text{кон.з.}} = 75\ ^\circ\mathrm{C} - 65\ ^\circ\mathrm{C} = 10\ ^\circ\mathrm{C},$$
   где $T_{\text{нач.ос.}}$ — температура, с которой вода втекала зимой, а $T_{\text{кон.ос.}}$ — температура, с которой вода зимой вытекала.
7. Значит, зимой вода текла по системе теплого пола со скоростью $V_{\text{з}} = 0,3$ м/с и каждый ее литр остывал на 10 °C.
8. Заметим, что если зимой скорость потока была равна
   $$\frac{V_{\text{з}}}{V_{\text{ос}}} = 60\%$$
   от скорости потока осенью, то за одинаковое время зимой через систему теплого пола протечет только 60% от осеннего объема, а так как количество теплоты, отдаваемое водой, пропорционально ее массе и разности ее температур:
   $$Q = m \cdot c \cdot \Delta T.$$
9. Количество теплоты, отдаваемое теплым полом в единицу времени зимой по сравнению с осенью будет равно:
   $$\frac{N_{\text{т.з}}}{N_{\text{т.ос.}}} = \frac{V_{\text{з}}}{V_{\text{ос}}} \cdot \frac{\Delta T_{\text{з}}}{\Delta T_{\text{ос}}} = \frac{0,3\ \text{м/с}}{0,5\ \text{м/с}} \cdot \frac{10\ ^\circ\mathrm{C}}{5\ ^\circ\mathrm{C}} = 1,2\ \text{раза}$$
   (зимой мощность будет, с одной стороны, в 0,6 раза меньше из-за меньшей скорости потока, но, с другой стороны, в 2 раза больше из-за того, что каждый литр отдает больше тепла).

10. Если теперь учесть, что теплый пол зимой отдавал в 1,2 раза больше тепла в единицу времени, можно сравнить и общие мощности обогрева:

$$\frac{N_{\text{общ.з.}}}{N_{\text{общ.ос.}}} = 2 \cdot \frac{N_{\text{т.з}}}{N_{\text{т.ос.}}} = 2 \cdot 1,2 \text{ раза} = 2,4 \text{ раза}.$$

11. Что при подстановке в первое выражение дает

$$(X + 20\ ^\circ\text{C}) = 2,4 \cdot 20\ ^\circ\text{C},$$

откуда получается ответ $X = 28\ ^\circ$C.

Ответ: температура зимой была равна $-28\ ^\circ$ C.

Критерии оценивания

1. Указано, что мощность, выделяемая теплым полом зимой равна мощности, выделяемой батареями — 2 балл
2. Объяснено почему мощность, выделяемая теплым полом зимой равна мощности, выделяемой батареями — 2 балла
3. Указано, что количество теплоты, отдаваемое водой в системе теплого пола в единицу времени пропорционально тому, как меняется температура воды — 4 балла
4. Указано, что количество теплоты, отдаваемое водой в системе теплого пола в единицу времени пропорционально скорости потока — 3 балла.
5. Получено верное численное соотношение между мощностями теплого пола зимой и осенью — 4 балла
6. Получено верное численное соотношение между мощностями теплопотерь дома зимой и осенью — 3 балл
7. Выражена связь между температурой зимой, температурой осенью, температурой внутри дома и мощностями теплопотерь — 4 балла
8. Получен верный ответ — 2 балла.

Задача VI.1.2.5. (24 баллов)

Темы: электрические цепи.

Условие

Применение в электроснабжении проводов со слишком маленьким сечением, может привести к возникновению пожара. Особому риску подвержена кухня, где много электроприборов, потребляющих большую мощность.

Например, мощность стандартного электрического духового шкафа равна 2500 Вт. Если подключить его к сети с помощью проводов сечением 1,5 мм^2 и включить на полную мощность — провода нагреются на 20 °C.

Определите, до какой температуры нагреются провода площадью 2,5мм^2 (стандартное сечение проводов, идущих от щитка к розеткам), если подключить с их помощью несколько кухонных приборов (см. список ниже), а затем, отключив на щитке предохранитель, включить все эти приборы одновременно?

Комнатную температуру считайте равной 20 °C. Температуру оплавления изоляции считайте равной 80 °C. Материал проводов во всех случаях одинаков, напряжение в сети всегда равно 220 Вольт (в рамках этой задачи его можно считать постоянным).

Мощность теплопроводности между телами пропорциональна разности их температур и площади их контакта.

Список оборудования и максимальной потребляемой мощности.

- Духовой шкаф — 2500 Вт.
- Посудомоечная машина — 2000 Вт.
- Электрический чайник — 1800 Вт.
- Микроволновка — 700 Вт.
- Тостер — 500 Вт.

Решение

1. Конечная температура провода определяется балансом между выделяемой мощностью $N_{\text{выд}}$ и мощностью теплопроводности $N_{\text{тепл}}$, зависящей от температуры: $N_{\text{выд}} = N_{\text{тепл}}$.
2. условию задачи мощность теплопроводности пропорциональна разности температур
$$\Delta T = (T_{\text{пров}} - T_{\text{комн}}),$$
где $T_{\text{пров}}$ — температура провода, а $T_{\text{комн}}$ — температура комнаты.
Также мощность теплопроводности пропорциональна площади соприкосновения тел S. Если обозначить коэффициент пропорциональности за α, можно записать равенство:
$$N_{\text{тепл}} = \alpha \cdot S \cdot \Delta T.$$
3. Рассмотрим как меняется мощность теплопроводности при изменении сечения провода. Если заменить провод сечением 1,5 мм^2 на провод сечением 2,5 мм^2, его диаметр D изменится в:
$$\frac{D_{2,5}}{D_{1,5}} = \sqrt{\frac{2,5\ \text{мм}^2}{1,5\ \text{мм}^2}} = 1,3\ \text{раза}.$$
4. Из-за того, что мощность теплопередачи пропорциональна площади поверхности провода $Surf$, которую для провода длины L и диаметра D можно выразить как:
$$Surf = pi \cdot D \cdot L,$$
при увеличении диаметра в 1,3 раза площадь поверхности увеличится в 1,3 раза, а значит, и мощность теплопроводности тоже (то есть, при той же температуре провод сможет отдавать на 30% больше теплоты в единицу времени).
5. Теперь рассмотрим от чего зависит выделяемая мощность. По формуле Джоуля – Ленца для участка провода с сопротивлением R, напряжение на котором равно $U_{\text{пров}}$, а ток через который равен $I_{\text{пров}}$, мощность можно выразить с помощью одной из формул:
$$N = \frac{U_{\text{пров}}^2}{R}$$
$$N = U_{\text{пров}} \cdot I_{\text{пров}}$$

$$N = I^2_{\text{пров}} \cdot R$$

6. Заметим, что при подключении электрических приборов практически все напряжение будет падать на них, а не на проводах. Поэтому, мы не можем найти значение напряжения на проводах, но можем, зная мощности приборов и напряжение в сети, найти силу тока в каждом из них.
7. Для духового шкафа мощность равна 2500 Вт, а значит, сила тока, текущего по проводам при подключении духового шкафа (он с проводами подключен последовательно) равна
$$I_{\text{пров}} = \frac{N_{\text{дух}}}{U_{\text{сети}}} = \frac{2500 \text{ Вт}}{220 \text{ В}} = 11,4 \text{ А},$$
где $N_{\text{дух}}$ — мощность духового шкафа, $U_{\text{сети}}$ — напряжение сети (оно же напряжение на духовом шкафу).
8. Если заменить провод 1,5 мм^2 на провод 2,5 мм^2 сила тока, необходимого для работы духового шкафа останется прежней (как и для других приборов).
Соответственно, мы можем сравнить мощность $N_{\text{выд}2,5}$, выделяемую на проводах 2,5 мм^2 при подключении духового шкафа и температуру проводов с мощностью $N_{\text{выд}1,5}$, выделявшейся на проводах сечением 1,5 м^2:
$$\frac{N_{\text{выд}2,5}}{N_{\text{выд}1,5}} = \frac{I^2_{\text{пров}} \cdot R_{2,5}}{I^2_{\text{пров}} \cdot R_{1,5}} = \frac{R_{2,5}}{R_{1,5}}.$$
9. Найти отношение сопротивлений не сложно. Сопротивление проводника R в общем случае равно
$$R = \frac{\rho \cdot L}{S},$$
следовательно, если считать что длина проводов одинакова, отношение сопротивлений проводов равно обратному отношению их площадей.
$$\frac{R_{2,5}}{R_{1,5}} = \frac{S_{1,5}}{S_{2,5}} = \frac{1,5 \text{ мм}^2}{2,5 \text{ мм}^2} = 0,6 \text{ раз}.$$
10. Чтобы воспользоваться этим соотношением между сопротивлениями и перенести их отношение на отношение мощностей, необходимо обратить внимание на то, что и баланс выделяемой мощности и мощности теплопроводности выполняется для участка провода любой длины: если взять не 1 см провода, а в два раза длиннее — и выделяемая мощность и мощность теплопередачи одинаково увеличатся в 2 раза.
11. Благодаря этому, можно считать, что при одинаковой силе тока мощность, выделяемая в проводе сечением 2,5 мм^2 составляет 0,6 от мощности, выделяемой в проводе 1,5 мм^2, а если учесть, что теплопередача провода 2,5 мм^2 в 1,3 раза эффективнее теплопередачи провода сечением 1,5 мм^2, можно найти температуру, что установится в проводе сечением 2,5 мм^2, если подключить духовой шкаф.
Запишем систему:
$$N_{\text{выд}1,5} = N_{\text{тепл}1,5} = \alpha \cdot S_{\text{пов}1,5} \cdot \Delta T_{1,5} = \alpha \cdot S_{\text{пов}1,5} \cdot 20 \text{ °C}$$
$$N_{\text{выд}2,5} = N_{\text{тепл}2,5} = \alpha \cdot S_{\text{пов}2,5} \cdot \Delta T_{2,5}$$
откуда
$$N_{\text{выд}2,5} = 0,6 \cdot N_{\text{выд}1,5} = 0,6 \cdot \alpha \cdot S_{\text{пов}1,5} \cdot 20 \text{ °C},$$

а значит,

$$\Delta T_{2,5} = 0,6 \cdot \frac{\alpha \cdot S_{\text{пов}1,5} \cdot 20\ ^\circ\text{C}}{\alpha \cdot S_{\text{пов}2,5}} = 0,6 \cdot \frac{S_{\text{пов}1,5}}{S_{\text{пов}2,5}} \cdot 20\ ^\circ\text{C} = \frac{0,6}{1,3} \cdot 20\ ^\circ\text{C} = 9,2\ ^\circ\text{C}.$$

12. Теперь, зная на сколько нагреется провод сечением 2,5 мм^2 при подключении духового шкафа можно найти температуру провода при подключении всей техники.
    Мощность электрического чайника в сумме с микроволновкой равна мощности духового шкафа, также как и сумма мощностей посудомоечной машины и тостера, а в сумме мощность всех приборов в 3 раза больше мощности духового шкафа.
    Из этого следует, что суммарный ток, потребляемый всей кухонной техникой в 3 раза больше силы тока, духового шкафа в 3 раза (мощность в 3 раза больше, а напряжение те же 220 вольт).
13. Если при подключении всех приборов сила тока, текущего через провода вырастет в 3 раза, мощность, выделяемая в проводах выделится в:

    $$N_{\text{выд}2,5\ \text{общ.}} = (3 \cdot I_{\text{дух}})^2 \cdot R = 9 \cdot I_{\text{дух}}^2 \cdot R = 9 \cdot N_{\text{выд}2,5},$$

    то есть, по сравнению с подключением одного духового шкафа, выделяемая мощность вырастет в 9 раз.
14. Если выделяемая температура увеличится в 9 раз — провода сильно нагреются, и новый баланс будет установлен при в 9 раз более высокой разности температур:

    $$N_{\text{тепл}2,5\ \text{общ.}} = \alpha \cdot S_{\text{пов}2,5} \cdot \Delta T_{2,5\text{общ}}$$

    $$N_{\text{тепл}2,5\ \text{общ.}} = N_{\text{выд}2,5\ \text{общ.}} = 9 \cdot N_{\text{выд}2,5} = 9 \cdot \alpha \cdot S_{\text{пов}2,5} \cdot \Delta T_{2,5},$$

    откуда

    $$\alpha \cdot S_{\text{пов}2,5} \cdot \Delta T_{2,5\text{общ}} = 9 \cdot \alpha \cdot S_{\text{пов}2,5} \cdot \Delta T_{2,5}.$$

    $$\Delta T_{2,5\ \text{общ}} = 9 \cdot \Delta T_{2,5} = 9 \cdot 9,2\ ^\circ\text{C} = 83\ ^\circ\text{C}.$$

15. Таким образом, если разность температур будет равна 83 °C, а температура в доме 20 °C температура проводов будет равна

    $$T_{\text{пров. общ}} = \Delta T_{2,5\text{общ}} + T_{\text{комн}}.$$

    $$83\ ^\circ\text{C} + 20\ ^\circ\text{C} = 103\ ^\circ\text{C}$$

Ответ: температура проводов при подключении всех приборов будет равна 103 °C.

Критерии оценивания

1. Указано, что в тепловом равновесии мощность, выделяемая проводом, равна мощности теплопроводности — 1 балл.
2. Указано, что площадь поверхности провода сечением 2,5 мм^2 в 1,3 раза больше площади поверхности провода сечением 1,5 мм^2, а значит, при той же разности температур мощность теплопроводности выше — 2 балла.
3. Указано, что сопротивление провода сечением 2,5 мм^2 при той же длине будет 0,6 от сопротивления провода сечением 1,5 мм^2 — 2 балла.

4. Указано, что мощность, выделяемая на проводе сечением 2,5 мм^2 при той же длине будет 0,6 от мощности, выделяемой на проводе сечением 1,5 мм^2 — 3 балл.
5. Указано, что и выделяемая мощность и мощность теплопроводности пропорциональны длине провода и от длины провода температура не зависит — 3 балла.
6. Выражена связь между температурой провода сечением 2,5 мм^2 и температурой провода сечением 1,5 мм^2 при одинаковой силе текущего через них тока — 4 балла.
7. Указано, что мощность всех приборов в 3 раза больше мощности духового шкафа — 1 балл.
8. Указано, что сила тока, текущего через провод, к которому подключены все приборы в 3 раза больше силы тока, текущего через провод, к которому подключен только духовой шкаф — 3 балла.
9. Вычислен ответ — 5 баллов (если допущены негрубые арифметические ошибки — 3 балла).

Физика. 10–11 классы

Задача VI.1.3.1. (20 баллов)

Темы: гидродинамика.

Условие

Николай решил построить фонтан. Предполагается, что погруженный в емкость насос будет подавать воду по горизонтальной трубе диаметром 20 см, заканчивающейся направленным вверх отверстием диаметром 5 см. По его расчетам, чтобы вода била на желаемую высоту требуется подключить насос, обеспечивающий скорость потока в трубе 0,5 м/с.

Определите какую эффективную мощность должен иметь этот насос.

Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. Потерями на трение пренебречь.

Решение

1. Чтобы решить задачу необходимо найти количество энергии, приобретаемое водой в единицу времени. А для этого необходимо найти конечную энергию каждого литра вытекающей воды и количество литров воды, вытекающей из отверстия в единицу времени.
2. Чтобы найти скорость воды на выходе из отверстия учтем, что вода несжимаема. Если за единицу времени (например, 1 секунду), насос прокачал N литров воды — ровно такое же количество воды должно покинуть отверстие.
3. Найдем расход воды Ф, измеряемый в м^3/с.
   Исходя из того, что скорость потока в трубе равна $U_{\text{тр}}$, за время t вода переместится в трубе на растояние L: $L = U_{\text{тр}} \cdot t$.
   То есть, в нее втечет объем V, равный:
$$V = S_{\text{тр}} \cdot L = \frac{\pi \cdot D_{\text{тр}}^2}{4} \cdot U_{\text{тр}} \cdot t,$$

где $S_{тр}$ — площадь сечения трубы, а $D_{тр}$ — ее диаметр.

4. Если за время t по трубе протекает объем V, поток равен:

$$\Phi = \frac{V}{t} = \frac{S_{тр} \cdot L}{t} = S_{тр} \cdot U_{тр},$$

то есть поток равен произведению площади сечения трубы и скорости потока жидкости.

5. Теперь найдем скорость истечения воды из отверстия $U_{отв}$.
Поток воды одинаков, а значит, произведение площади сечения отверстия $S_{отв}$ и скорости истечения воды из отверстия тоже равно Φ:

$$\Phi = S_{тр} \cdot U_{тр} = S_{отв} \cdot U_{отв}$$

а значит,

$$U_{отв} = \frac{\Phi}{S_{отв}} = \frac{3,14 \cdot 20 \text{ см}^2}{4} \cdot 0,5 \text{ м/с}/3,14/5 \text{ см}^2 = 16 \cdot 0,5 \text{ м/с} = 8 \text{ м/с}.$$

6. Получается что вода, вытекшая из отверстия за время t будет обладать кинетической энергией $E_{кин}$:

$$E_{кин} = \frac{m \cdot U_{отв}^2}{2} = \frac{V \cdot \rho \cdot U_{отв}^2}{2} = \frac{\Phi \cdot t \cdot \rho \cdot U_{отв}^2}{2}.$$

7. А значит, мощность насоса $N_{нас}$ равна:

$$N_{нас} = \frac{E_{кин}}{t} = \Phi \cdot t \cdot \rho \cdot U_{отв}^2/2/t = \frac{\Phi \cdot \rho \cdot U_{отв}^2}{2}.$$

8. При подстановке численных значений находим ответ:

$$N_{нас} = \frac{3,14 \cdot (20 \text{ см})^2}{4} \cdot 0,5 \text{ м/с} \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot (8 \text{ м/с})^2 /2 = 500 \text{ Вт}.$$

Примечание: можно найти кинетическую энергию воды в трубе $E_{кин.тр.}$

$$E_{кин.тр.} = \frac{m \cdot U_{тр}^2}{2} = \frac{V \cdot \rho \cdot U_{тр}^2}{2} = \frac{\Phi \cdot t \cdot \rho \cdot U_{тр}^2}{2},$$

и, соответственно, мощность, затрачиваемую на увеличение кинетической энергии воды при закачивании воды в трубу

$$N_{кин} = \frac{E_{кин}}{t} = \frac{\Phi \cdot \rho \cdot U_{тр}^2}{2}$$

что при подставлении численных значений дает:

$$N_{кин} = \frac{0,016 \text{ м}^3/\text{с} \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot (0,5 \text{ м/с})^2}{2} = 2 \text{ Вт}.$$

Однако, эта мощность — лишь часть мощности насоса, потому что у воды в трубе есть еще и потенциальная энергия из-за того, что она находится под давлением.

$$N_{нас} \neq N_{кин}.$$

Ответ: мощность насоса равна 500 Вт.

Критерии оценивания

1. Записана формула для кинетической энергии воды в общем виде — 1 балл.
2. Указано что мощность насоса равна изменению кинетической энергии воды в единицу времени (не кинетической энергии воды в трубе!) — 2 балла.
3. Указано что масса воды, поступающая в трубу в единицу времени пропорциональна площади сечения и скорости — 2 балла.
4. Найдено или используется в решение численное значение потока воды — 2 балла.
5. Установлена связь между скоростью воды, вытекающей из отверстия и скоростью воды в трубе (приведено равенство потоков или записана пропорция через площади сечений) — 2 балла.
6. Найдено или используется в решении численное значение скорости воды, вытекающей из отверстия — 3 балла.
7. Найдено значени кинетическая энергия воды, вытекающей из отверстия за некоторый промежуток времени — 4 балла.
8. Получен ответ — 4 балла.

Задача VI.1.3.2. (25 баллов)

Темы: баллистика.

Условие

Иногда для подключения дома к интернету используют так называемые «воздушные» кабели. Такой кабель одним концом фиксируется на крыше подключаемого дома, а другим концом — на крыше высотного дома, где установлено распределительное оборудование.

Чтобы установить такой кабель можно сперва выстрелить с крыши высотного здания на крышу подключаемого дома болванкой с леской, а затем по натянутой леске с помощью ролика спустить конец кабеля на крышу подключаемого дома.

Определите на каком максимальном расстоянии могут находиться дома высотой 40 и 20 метров, если при выстреле начальная скорость болванки равна 15 м/с, а массой лески по сравнению с массой болванки можно пренебречь?

Сопротивлением воздуха и трением лески пренебречь, ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.

Решение

1. По условию задачи сопротивлением воздуха можно пренебречь, то есть, в полете болванка будет двигаться с ускорением g, направленным вниз.
2. Это значит, что горизонтальная скорость болванки будет постоянна, а значит, расстояние L, на которое она улетит равно

$$L = V_x \cdot t,$$

где V_x — горизонтальная составляющая скорости полета болванки, а t — общее время полета.

3. Также обратим внимание на то, что абсолютное значение высот для решения задач не важно, а значение имеет только разность высот ΔH:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = 40 \text{ м} - 20 \text{ м} = 20 \text{ м},$$

где H_1 — высота первого дома, а H_2 — высота второго дома.
4. Соответственно, мы можем переформулировать задачу к классическому виду: «на какое максимальное расстояние можно выстрелить с высоты $\Delta H = 20$ м, если начальная скорость болванки равна 15 м/с».
5. Решить эту задачу проще всего рассмотрев изменение скорости тела. Обозначим вектор скорости тела в начальный момент за $\overrightarrow{V_{\text{нач}}}$, а вектор конечной скорости за $\overrightarrow{V_{\text{кон}}}$.
Каждую секунду полета к вектору скорости прибавляется вектор $\overrightarrow{g}$, направленный вниз, а за все время полета значение скорости изменится на $\overrightarrow{g} \times t$ ($\overrightarrow{V_{y_{\text{нач}}}}$ сменится на $\overrightarrow{V_{y_{\text{кон}}}}$, см. рис. VI.1.1)

$$\overrightarrow{V_{\text{кон}}} = \overrightarrow{V_{\text{нач}}} + \overrightarrow{g} \times t$$

6. Заметим, что вектора $\overrightarrow{V_{\text{кон}}}$, $\overrightarrow{V_{\text{нач}}}$ и $\overrightarrow{g} \times t$ образуют треугольник (см. рис. VI.1.1), из которого можно найти дальность полета.

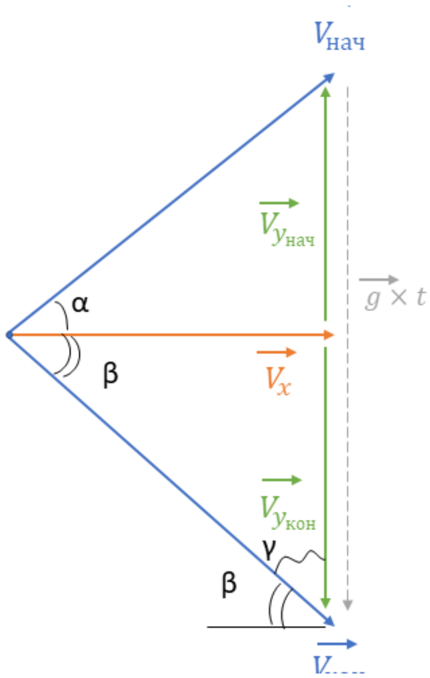


Рис. VI.1.1

7. Действительно, горизонтальное перемещение болванки, равное $L = V_x \cdot t$, можно выразить через площадь этого треугольника.
Площадь треугольника $S_{\text{треуг}}$ равна половине произведения стороны $\overrightarrow{g} \times t$ и высоты $\overrightarrow{V_x}$

$$S_{\text{треуг}} = 0,5 \cdot V_x \cdot g \cdot t$$

а значит,

$$L = V_x \cdot t = \frac{2 \cdot S_{\text{треуг}}}{g}.$$

8. Площадь треугольника можно выразить не только через произведение основания и высоты, но и через произведение двух сторон и синуса между ними:

$$S_{\text{треуг}} = 0,5 \cdot V_{\text{нач}} \cdot V_{\text{кон}} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

а значит,

$$L = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot V_{\text{нач}} \cdot V_{\text{кон}} \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g} = \frac{V_{\text{нач}} \cdot V_{\text{кон}} \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g}.$$

9. Заметим, что по закону сохранения энергии кинетическая энергия $E_{\text{к}}$ болванки увеличилась на величину, равную изменению ее потенциальной энергии $E_{\text{п}}$:

$$E_{\text{к.кон.}} - E_{\text{к.нач.}} = E_{\text{п.нач.}} - E_{\text{п.кон.}}$$

то есть,

$$\frac{m \cdot V_{\text{кон}}^2}{2} - \frac{m \cdot V_{\text{нач}}^2}{2} = m \cdot g \cdot \Delta H$$

а значит,

$$V_{\text{кон}}^2 = V_{\text{нач}}^2 + 2 \cdot g \cdot H,$$

откуда

$$V_{\text{кон}} = \sqrt{V_{\text{нач}}^2 + 2 \cdot g \cdot H} = \sqrt{(15 \text{ м/с})^2 + 2 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 20 \text{ м}} = 25 \text{ м/с}.$$

10. Теперь, в выражении для максимального расстояния L нам известны $V_{\text{нач}}$, $V_{\text{кон}}$ и g и осталось найти только максимальное значение $\sin(\alpha + \beta)$.
11. Синус любого угла не больше единицы, а значит, максимальное значение

$$\sin(\alpha + \beta) \leqslant 1.$$

Проверим, достижимо ли значение $\sin(\alpha + \beta) = 1$ в нашей задаче. Для этого угол $\alpha + \beta$ должен быть равен 90°.
12. Угол $(\alpha + \beta)$ — это угол между скоростями $\overrightarrow{V_{\text{нач}}}$ и $\overrightarrow{V_{\text{кон}}}$, то есть максимальное расстояние будет достигнуто когда начальная скорость окажется перпендикулярна конечной скорости, а треугольник $\overrightarrow{V_{\text{нач}}}$, $\overrightarrow{V_{\text{кон}}}$, $\overrightarrow{g} \times t$ — прямоугольный.
13. Если это так, то угол γ (см. рис. VI.1.1), который равен $90 - \beta$, оказывается равен углу α, а значит, его тангенс равен:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{V_{\text{нач}}}{V_{\text{кон}}} = \frac{15}{25} = 0,6,$$

откуда $\alpha = 31°$.
14. Выполним проверку: если $\operatorname{tg}(\alpha) = 0,6$, конечная скорость действительно перпендикулярна начальной, а значит, расстояние полета равно

$$L = \frac{V_{\text{нач}} \cdot V_{\text{кон}} \cdot \sin(90°)}{g} = \frac{15 \text{ м/с} \cdot 25 \text{ м/с} \cdot 1}{10 \text{ м/с}^2} = 37,5 \text{ м}.$$

Ответ: 37,5 м.

Критерии оценивания

1. Указано что задача является баллистической, например, указано что $V_x = const$, $V_y(t) = V_{y_{\text{нач}}} - g \cdot t$ (или для координат) — 2 балла.
2. Указано что важна только разность высот зданий — 1 балл.
3. Найдена конечная скорость — 2 балла.

   Для решения в векторном виде:

   3.а. указано что $\overrightarrow{V_{\text{нач}}}$, $\overrightarrow{V_{\text{кон}}}$ и $\overrightarrow{g} \times t$ образуют треугольник — 2 балл.

   4.а. расстояние между домами выражено через площадь треугольника — 3 балла.

   5.а. площадь треугольника выражена через начальную, конечную скорость и угол между ними — 4 балла.

   6.а. показано что угол между начальной и конечной скоростью может быть прямым — 3 балла.

   7.а. Получен обоснованный решеним ответ — 3 балла.

   Для решения в координатном виде:

   3.б. Записаны уравнения движения вдоль двух координат, связывающие V_x, $V_{\text{нач}_y}$, H и L — 2 балла.

   4.б. расстояние между домами выражено через начальную скорость, разность высот и еще один параметр (угол или время) — 2 балла.

   5.б. Указано максимум каких множителей надо найти — 2 балла.

   6.б. Получено выражение, позволяющее найти оптимальный угол (например, взята производная) — 6 балла (если есть попытки найти максимум, не приведшие к успеху, но с рациональным зерном — можно поставить 2 или 4 балла)

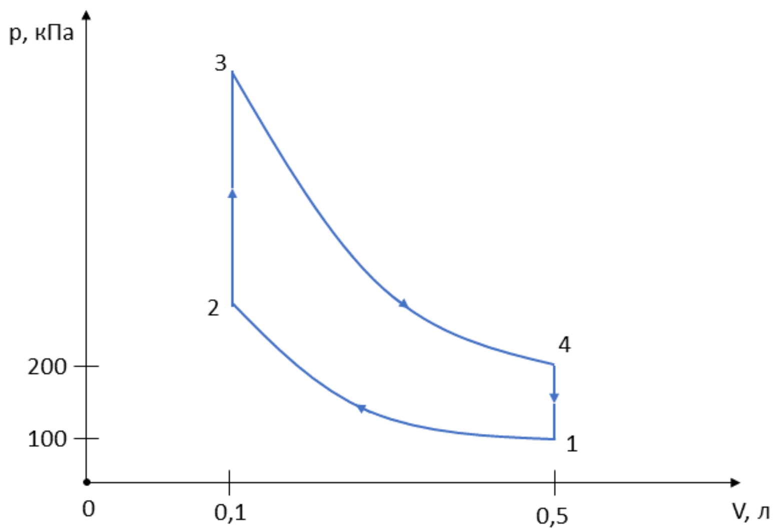
   7.б. Получен обоснованный решением ответ — 3 балла.

Задача VI.1.3.3. (20 баллов)

Темы: газовые законы.

Условие

Для электроснабжения загородных домов используются газопоршневые генераторы, работающие по циклу Отто. Схема работы типового генератора изображена на рисунке.



- в точке 1 происходит заполнение камеры сгорания воздухом с добавлением метана;
- на участке 1–2 происходит сжатие топливовоздушной смеси;
- на участке 2–3 происходит сгорание метана при постоянном объеме;
- на участке 3–4 происходит расширение газовой смеси;
- на участке 4–1 происходит охлаждение газовой смеси;
- в точке 1 происходит выпуск отработанных газов.

Рассчитайте мощность генератора при частоте 1500 циклов в минуту, если при сгорании газовая смесь получает 2 кДж теплоты, а КПД преобразования механической работы в электрическую равен 80%.

Считайте, что для участков 1–2 и 3–4 применимо уравнение адиабаты Пуассона $P \cdot V^\gamma = const$ с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$ (то есть, их можно считать изоэнтропийными квазистатическими адиабатическими процессами).

Решение

1. Перед тем, как приступить к решению задачи необходимо определиться с моделью газа.
   Заметим, что в генераторе используется топливовоздушная смесь, то есть, абсолютное большинство молекул — двухатомные (азот и кислород). Они имеют 5 степеней свободы, а показатель адиабаты для двухатомного газа равен
   $$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4.$$
   Также заметим, что кислород с метаном реагируют согласно уравнению
   $$\mathrm{CH_4 + 2\,O_2 = CO_2 + 2\,H_2O},$$
   то есть, количество вещества можно считать постоянным.
2. Восстановим координаты точек на P–V-диаграмме. Объемы нам известны во всех точках, а значит, необходимо найти давления в точках 2, 3 и 4.

3. Первый участок (1–2) по условию задачи можно считать квазистатическим, а значит, кроме условия
$$Q_{1-2} = 0,$$
можно считать что газ подчиняется уравнению адиабаты Пуассона (см. примечание):
$$P \cdot V^{\gamma} = const.$$
4. Тогда давление в точке 2 может быть найдено из равенства
$$P_2 \cdot V_2^{\gamma} = P_1 \cdot V_1^{\gamma},$$
откуда
$$P_2 = P_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 100 \text{ кПа} \cdot \left(\frac{2,0 \text{ л}}{0,2 \text{ л}}\right)^{1,4} = 2,5 \text{ МПа}.$$
5. Теперь найдем давление в точке 3.
Так как объем на участке 2–3 постоянен, вся полученная газом теплота преобразуется во внутреннюю энергию:
$$Q = \Delta U$$
$$Q = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot (T_3 - T_2)$$
$$\frac{i}{2}(P_3 - P_2) \cdot V_2 = Q,$$
откуда
$$P_3 - P_2 = \frac{\frac{2}{i} \cdot Q}{V_2},$$
что при подставлении чисел дает
$$P_3 - P_2 = \frac{\frac{2}{5} \cdot 2000 \text{ Дж}}{0,0002} = 4 \text{ МПа}$$
$$P_3 = 2,5 \text{ МПа} + 4 \text{ МПа} = 6,5 \text{ МПа}.$$
6. Наконец, рассчитаем давление в точке 4 еще раз воспользовавшись уравнением адиабаты
$$P_4 \cdot V_4^{\gamma} = P_3 \cdot V_3^{\gamma}$$
$$P_4 = P_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V4}\right)^{\gamma} = 6,5 \text{ МПа} \cdot \left(\frac{0,2 \text{ л}}{2,0 \text{ л}}\right)^{1,4} = 0,26 \text{ МПа}.$$
7. Чтобы найти работу газа за цикл можно либо найти разность работ на участках 3–4 и 2–3 либо найти разность теплот на участках 2–3 и 4–1. Последнее проще, поэтому воспользуемся этим способом.
8. На участка 4–1 газ отдает количество теплоты, равное минус количеству полученной теплоты:
$$-Q = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot (T_4 - T_1)$$
$$-Q = \frac{i}{2}(P_4 - P_1) \cdot V_1,$$
откуда
$$-Q = \frac{5}{2} \cdot (260 \text{ кПа} - 100 \text{ кПа}) \cdot 0,002 \text{ м}^3 = 800 \text{ Дж}.$$

9. Зная количество полученной и отданной теплоты, можно найти совершенную газом механическую работу:

$$A = Q_{2-3} - Q_{4-1} = 2000 \text{ Дж} - 800 \text{ Дж} = 1200 \text{ Дж}.$$

10. Теперь, когда нам известна работа газа за один цикл найдем мощность генератора W:

$$W = N \cdot A \cdot \eta = 1500 \text{ об/мин}/60 \text{ с/мин} \cdot 1200 \text{ Дж} \cdot 0,8 = 24\,000 \text{ Вт}.$$

Примечание: вывод уравнения адиабаты Пуассона:

1. если $Q = 0$, изменение внутренней энергии равно совершаемой газом работе

$$\Delta U = P \cdot \Delta V,$$

то есть,

$$\frac{i}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T = -P \cdot \Delta V$$

2. при этом, из уравнения Клапейрона – Менделеева следует, что

$$P \cdot \Delta V + V \cdot \Delta P = \nu \cdot R \cdot \Delta T$$

3. откуда можно получить

$$P \cdot \Delta V + V \cdot \Delta P = -\frac{2}{i} \cdot P \cdot \Delta V$$

4. что после разделения переменных дает

$$\left(1 + \frac{2}{i}\right) \cdot \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{P}$$

5. где коэффициент перед ΔV называется показателем адиабаты

$$\gamma = \frac{i+2}{i},$$

то есть,

$$\gamma \cdot \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{P}$$

6. это уравнение можно решить сделав замену переменной:
Пусть $X = \ln(V)$, а $Y = \ln(P)$.
В этом случае $V = e^X$, $P = e^Y$, а наше уравнение примет вид

$$\gamma \cdot \Delta X = -\Delta Y$$

(физический смысл: если X растет, то Y убывает в γ раз быстрее)

7. Если просуммировать изменения каждой из величин получится равенство

$$\gamma \cdot (X - X_0) = -(Y - Y_0),$$

где X_0 и Y_0 — некоторые константы и их можно объединить в одну:

$$\gamma \cdot X + Y = \gamma \cdot X_0 + Y_0 = const$$

8. Возвращаясь к давлению и объему получаем:

$$\gamma \cdot \ln V + \ln P = const,$$

то есть,

$$\ln(V^\gamma \cdot P) = const,$$

откуда как раз и получается уравнение Пуассона

$$P \cdot V^\gamma = const.$$

Ответ: мощность генератора равна 24 кВт.

Критерии оценивания

1. Обоснована возможность применения модели цикла с постоянным количеством газа — 1 балл.
2. Обосновано применение показателя адиабаты 7/5 — 1 балл.
   (указание: если в решении использовался другой показатель — штрафа в последующих пунктах нет)
3. Записано уравнение Пуассона для адиабатического процесса — 2 балла.
4. Получено выражение для давления в точке 2 или 4 — 2 балла.
5. Найдено значение давления в точке 2 — 1 балл.
6. Получено выражение для давления в точке 3 — 2 балла.
7. Найдено значение давления в точке 3 — 1 балл.
8. Найдено значение давления в точке 4 (или если рассчитана работа на участке 3-4) — 1 балл.
9. Найдено количество отданной теплоты (или рассчитана работа на участке 3-4) — 2 балла.
10. Записано выражение для механической работы газа за цикл — 1 балл.
11. Найдена механическая работа газа за цикл — 2 балла.
12. Посчитано количество циклов за секунду — 1 балл.
13. Получен ответ 3 балла (если арифметическая ошибка — 2 балла).

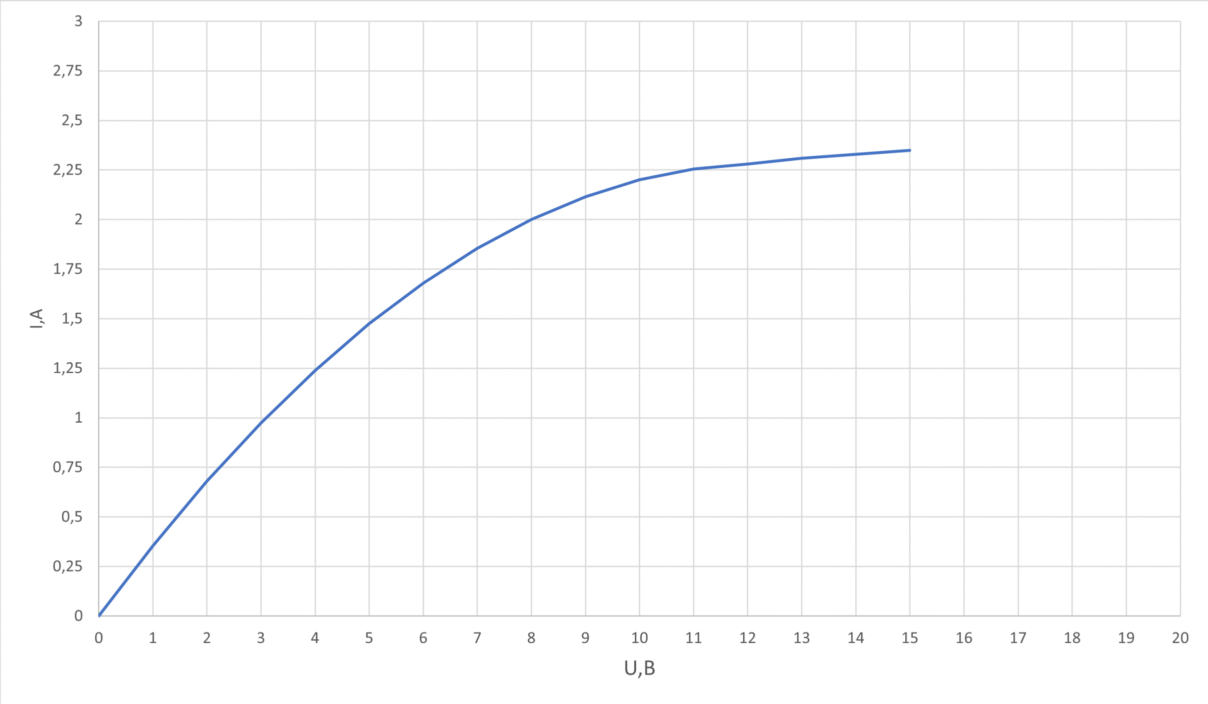
Задача VI.1.3.4. (20 баллов)

Темы: ВАХ.

Условие

Для освещения комнаты используются две одинаковые лампочки с нелинейным сопротивлением, вольт-амперная характеристика которых приведена на рисунке. В первом режиме лампочки подключены к неидеальному источнику напряжения параллельно, а во втором случае — последовательно.

С помощью графика ВАХ определите во сколько раз отличается мощность лампочек в параллельном и последовательном режимах, если ЭДС источника равна 20 В, а внутреннее сопротивление равно 2 Ом.



Решение

1. Заметим, что когда две лампочки подключены параллельно — сила тока, текущего через них равна удвоенной силе тока, текущего через одну лампочку
$$I_{II} = 2 \cdot I_{\text{л}},$$
при этом напряжение всего участка из двух лампочек равно напряжению каждой из них.
$$U_{II} = U_{\text{л}},$$
а значит, график зависимости сила тока двух параллельно подключенных лампочек, от напряжения на этом участке отличается от ВАХ одной лампочки только увеличением цены делений шкалы по оси ординат в 2 раза.
2. Аналогичным образом можно преобразовать график и для случая лампочек, соединенных последовательно:
$$U_{\_\_} = 2 \cdot U_{\text{л}}$$
$$I_{\_\_} = I_{\text{л}}$$
3. Таким образом, задача с двумя лампочками свелась к двум задачам, в которых к неидеальному источнику напряжения подключены некие элементы с известными нам Вольт-Амперными характеристиками.
4. Разберемся с тем, как решать такую задачу в общем виде.
Пусть у нас есть элемент X, через который течет сила тока, зависящая от напряжения как функция $I = I_x(U_x)$
Тогда, если подключить такой элемент к источнику напряжения с ЭДС E и внутренним сопротивлением r, на внутреннем сопротивлении будет такой же ток:
$$Ir = I,$$

а напряжение на внутреннем сопротивлении будет равно

$$Ur = E - U_x$$

причем по закону Ома

$$r = \frac{Ur}{Ir} = \frac{E - U_x}{I}.$$

5. Заметим, что равенство $r = (E - U_x)/I$ можно преобразовать как

$$I = \frac{E - U_x}{r},$$

что является уравнением прямой $I = I_{\text{ц}}(U_x)$ на графике зависимости силы тока от U_x, идущей из точки $(0, E/r)$ в точку $(0, E)$.

6. При подключении неизвестного элемента к источнику напряжения сила тока, текущего через элемент должна соответствовать графику ВАХ элемента

$$I = I_x(U_x),$$

но в это же время, сила тока должна соответствовать и полученному нами условию

$$I = I_{\text{ц}}(U_x).$$

Это возможно только в точках пересечения графиков $I_x(U_x)$ и $I_{\text{ц}}(U_x)$, а значит, для решения задачи необходимо построить на графике необходимые прямые.

7. В нашем случае уравнение прямой $I_{\text{ц}}(U_x)$ имеет вид

$$I_{\text{ц}} = \frac{20\ \text{В} - U_x}{2\ \text{Ом}}.$$

Однако, из-за того, что у нас не одна лампочка, а две и они соединены либо параллельно либо последовательно уравнение прямой надо преобразовать к величинам $I_{\text{л}}$ и $U_{\text{л}}$.

8. Для параллельного соединения сила тока, текущего через внутреннее сопротивление будет в 2 раза больше силы тока, текущего через каждую из лампочек, а значит, в осях графика $I_{\text{л}}(U_{\text{л}})$ уравнение примет вид

$$I_{\text{л}} = 0,5 I_{\text{ц}} = 0,5 \frac{20\ \text{В} - U_{\text{л}}}{2\ \text{Ом}} = 5\ \text{А} - \frac{U_{\text{л}}}{4}.$$

9. Следует, что на лампочках при параллельном подключении может быть единственное значение напряжения, равное

$$U_{\text{л}_{II}} = 11\ \text{В},$$

а сила тока, текущего через каждую лампочку, примерно равна

$$I_{\text{л}_{II}} = 2,25\ \text{А}$$

10. Тогда мощность N_{II}, выделяемая на каждой из параллельно подключенных лампочек равна

$$N_{II} = U_{\text{л}_{II}} \cdot I_{\text{л}_{II}} = 11\ \text{В} \cdot 2,25\ \text{А} = 25\ \text{Вт}.$$

11. Теперь рассмотрим последовательное соединение лампочек.
Напряжение участка в два раза больше напряжения каждой из лампочек

$$U_x = 2 \cdot U_л,$$

а значит, уравнение прямой примет вид

$$I_л = I_ц = \frac{20\ \text{В} - U_x}{2\ \text{Ом}} = \frac{20\ \text{В} - 2 \cdot U_л}{2\ \text{Ом}} = 10\ \text{А} - U_л$$

12. Следует что на лампочках при последовательном подключении на лампочках может быть единственное значение напряжения, равное

$$U_{л\_\_} = 8\ \text{В},$$

а сила тока примерно равна

$$I_{л\_\_} = 2\ \text{А}.$$

13. Тогда мощность $N\_\_$, выделяемая на каждой из последовательно подключенных лампочек равна

$$N\_\_ = U_{л\_\_} \cdot I_{л\_\_} = 8\ \text{В} \cdot 2\ \text{А} = 16\ \text{Вт}.$$

14. А значит, отношение мощностей лампочек равно

$$\frac{N_{--}}{N_{II}} = \frac{16\ \text{Вт}}{25\ \text{Вт}} = 0,64.$$

Ответ: мощности лампочек отличаются в 0,64 раза.

Критерии оценивания

1. Записан закон Ома в общем виде — 1 балл.
2. Записаны 3 выражения, связывающие силы тока и напряжения на лампочке и на внутреннем сопротивлении при параллельном включении лампочек (например, $Ir = 2I_л$, $Ur = E - U_л$, $Ur = Ir \cdot r$) — 2 балла.
3. Записаны выражения, связывающие силы тока и напряжения на лампочке и на внутреннем сопротивлении при последовательном включении лампочек — 2 балла.
4. Определено значение силы тока на лампочках при параллельном включении — 3 балла.
5. Определено значение силы тока на лампочках при последовательном включении — 3 балла.
6. Из решения понятно что для каждой ситуации возможно только одно значение напряжения и силы тока на лампочках (если учащийся нашел напряжения и силы токов перебором этот балл не ставится) — 4 балла.
7. Найдена мощность одной или обеих лампочек при параллельном соединении — 2 балла.
8. Найдена мощность одной или обеих лампочек при последовательном соединении — 2 балла.
9. Получен ответ — 1 балл.

Задача VI.1.3.5. (20 баллов)

Темы: оптика.

Условие

Оптоволоконная связь — это система передачи информации в виде световых сигналов, распространяющихся внутри прозрачных цилиндрических нитей. Она основана на принципе полного внутреннего отражения, не позволяющем свету выйти из цилиндра с высоким показателем преломления в оболочку с более низким показателем преломления.

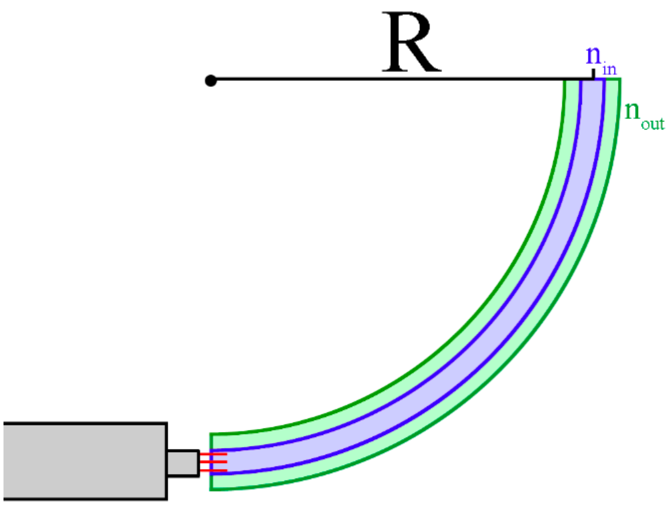
Для передачи сигналов на короткие расстояния используются полимерные оптические волокна (POF — polymer optical fiber) диаметром сердцевины 1 мм. Их легко прикреплять друг к другу и к лазеру/приемнику, а также легко размещать в кабель-каналах благодаря тому, что их можно сильно изгибать без возникновения больших оптических потерь: минимальный радиус изгиба равен 2 см.

Однако, в месте подключения волокна к лазеру, лучи из которого идут под прямым углом к торцу волокна, оно может быть изогнуто еще сильнее: вплоть до 1 см.

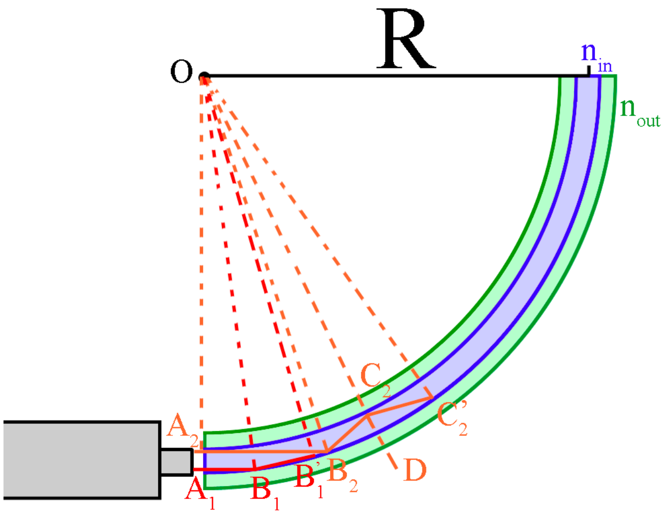
Считая что радиус изгиба 1 см является критическим для полного внутреннего отражения, определите во сколько раз показатель преломления сердцевины больше показателя преломления оболочки.

Для упрощения считайте что задача двумерная.

Радиус изгиба измеряется от центра до оси оптоволокна (см. рисунок).



Решение



1. В первую очередь, запишем закон преломления для луча, падающего под углом α на границу сердцевины и оболочки оптоволокна
$$\sin(\alpha) \cdot n_{\text{серц}} = \sin(\beta) \cdot n_{\text{об}}$$
условием полного внутреннего отражения будет значение
$$\sin(\beta) > 1,$$
то есть,
$$\sin(\alpha) > \frac{n_{\text{об}}}{n_{\text{серц}}}.$$
Таким образом, угол падения всех лучей должен быть достаточно велик для того, чтобы синус угла падения был больше отношения показателей преломления оболочки и сердцевины.
2. Рассмотрим несколько выходящих из лазера лучей.
Назовем их A_1B_1, A_2B_2 и т. д.
Заметим, что при первом отражении от границы сердцевины оптоволокна и оболочки, для луча A_1B_1 угол падения $\angle A_1B_1O$ будет больше, чем для луча A_2B_2 ($\angle A_2B_2O$)
$$\angle A_2B_2O < \angle A_1B_1O,$$
а значит, при первом отражении наибольшему риску выхода из оптоволокна подвержен луч A_2B_2.
3. Попробуем свести задачу к рассмотрению только первого отражения.
Для этого рассмотрим повторные отражения и попробуем найти в них закономерность.
   3.1. После отражения от внешней стенки луч может направиться либо снова к внешней стенке либо к внутренней.
      - Если луч снова отразится от внешней стенки (см. пример B_1B_1' на рисунке), то угол падения останется прежним: $OB_1 = OB_1'$, а значит, $\angle OB_1B_1' = \angle OB_1'B_1$, а значит, луч останется внутри сердцевины оптоволокна.

- Если же луч направится к внутренней границе с оболочкой (см. пример B_2C_2), от угол падения увеличится:

$$\angle DC_2B_2 = \angle OB_2C_2 + \angle B_2OC_2 > \angle OB_2C_2,$$

а значит, луч еще лучше отразится.

3.2. Теперь, рассмотрим луч, отразившийся от внутренней стенки. Он обязательно упадет на внешнюю (см. пример C_2C').
Из-за того, что угол падения равен углу отражения, треугольники OC_2B_2 и OC_2C_2' равны, а значит, угол падения луча в точке C_2' равен углу падения луча на внешнюю границу сердцевины в предыдущей точке B_2:

$$\angle OC_2'C_2 = \angle OB_2A_2$$

Таким образом, если луч попал в оптоволокно и отразился в первый раз, при всех последующих отражениях он также не покинет сердцевину.

4. С учетом приведенных выше рассуждений, для определения критического отношения показателей преломления достаточно рассмотреть лишь падение луча A_2B_2.
Рассмотрим прямоугольный треугольник A_2B_2O: синус угла падения $\angle A_2B_2O$ равен:
$$\sin(\angle A_2B_2O) = \frac{A_2O}{B_2O} = \frac{R-r}{R+r},$$
где R — радиус изгиба оптоволокна, а r — радиус сердцевины.
5. Подставим численные значения для синуса угла падения:

$$\sin(\angle A2B_2O) = \frac{R-r}{R+r} = \frac{10\text{ мм} - 1\text{ мм}/2}{10\text{ мм} + 1\text{ мм}/2} = \frac{9,5\text{ мм}}{10,5\text{ мм}} = 0,905.$$

Ответ: отношение показателей преломления оболочки и сердцевины равно 0,905. Ответ можно округлить до 0,91 или 0,9.

Критерии оценивания

1. Хотя бы один раз применен закон преломления — 2 балла.
2. Приведены аргументы в пользу того, что необходимо рассматривать луч ближе к центру, а не дальше (A_2B_2, а не A_1B_1) — 3 балла.
3. Проведено сравнение повторных отражений и показано, что достаточно рассмотреть только первое отражение — 9 баллов (по 3 балла за каждый случай).
4. Записано геометрическое выражение для синуса угла падения луча A_2B_2 — 3 балла (2 балла если рассмотрен луч A_1B_1 и не рассмотрен луч A_2B_2).
5. Получен ответ — 3 балла.