Разработка компьютерных игр

2022/23 учебный год

Заключительный этап

Предметный тур

Информатика. 8–11 класс

Задача VI.1.1.1. Космические треугольники (10 баллов)

Однажды астроном сфотографировал звездное небо и, посмотрев на фотографии, увидел много треугольников из звёзд.

Вершина каждого треугольника находится в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3). Ваша задача помочь астроному определить, можно ли провести прямую, которая будет делить треугольник **ровно на два невырожденных треугольника** (невырожденным называется треугольник, площадь которого не равна нулю). Помимо того, эта прямая должна быть либо горизонтальной, либо вертикальной, то есть быть **параллельной либо оси** x, **либо оси** y.

Формат входных данных

В первой строке задано число n — количество наборов входных данных ($1 \leqslant n \leqslant 10^4$).

Затем идут n наборов, каждый из которых состоит из трёх строк. В i-й из трёх строк заданы два целых числа x_i и y_i ($1 \leqslant x_i, y_i \leqslant 10^8$) — координаты i-й вершины.

Все треугольники не вырожденные, то есть площадь каждого не равна нулю.

Формат выходных данных

Для каждого набора координат треугольника вывести сообщение «YES» в случае, если провести разделение можно и «NO», если этого сделать нельзя.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
2
0 2
0 0
2 0
2 0
4 2
8 0

Стандартный вывод
NO
YES

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

int main() {
    int n, ya, yb, yc, xa, xb, xc;
    cin >> n;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> xa >> ya >> xb >> yb >> xc >> yc;
        if (((ya == yb) || ((yb == yc) || (yc == ya))) &&
            (((xa == xb) || (xb == xc)) || (xc == xa)))
            cout << "NO" << endl;
        else
            cout << "YES" << endl;
    }
}
```

Задача VI.1.1.2. Помехи в сигнале (20 баллов)

На космическом аппарате была замечена ошибка в виде неверной работы передатчика. Передача сигналов была с определенной помехой: в массив данных постоянно вмешивалась цифра другой четности. Необходимо определить, какая из цифр в массиве лишняя и выписать её.

Формат входных данных

В первой строке записано целое число n — количество чисел в массиве ($3 \leqslant n \leqslant 100$). В следующей строке через пробел записан массив натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 100.

Формат выходных данных

Выведите число, являющимся лишним в последовательности.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
6 46 32 76 75 28 98

Стандартный вывод
75

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

int main() {
    int n;
    cin >> n;
    int a[n], even = 0, odd = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> a[i];
        if (a[i] % 2 == 0)
            even++;
        else
            odd++;
    }
    if (even == 1)
        for (int i = 0; i < n; i++)
            if (a[i] % 2 == 0) {
                cout << a[i];
                return 0;
            } else
                for (int i = 0; i < n; i++)
                    if (a[i] % 2 != 0) {
                        cout << a[i];
                        return 0;
                    }
}
```

Задача VI.1.1.3. Движение марсохода (20 баллов)

Марсоход передвигается по поверхности Марса и изучает образцы с целью доставки их на Землю.

Поверхность, по которой он двигается, представляет собой поле $N \times M$, состоящее из квадратов. Обозначим квадрат в i-й ($1 \leqslant i \leqslant N$) строке и j-м ($1 \leqslant j \leqslant M$) столбце через (i, j). Все числа в квадратах равны 1 или -1. Двигаться Марсоход начинает с квадрата (1, 1) и за один раз может перемещаться на один квадрат вниз или вправо. В конце концов, ему нужно оказаться в квадрате (N, M).

Можно ли двигаться так, чтобы сумма записанных по дороге значений (включая первый и последний квадрат) была равна 0?

1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1

Формат входных данных

В первой строке записано целое число n — количество входных данных t $(1 \leqslant t \leqslant 10^4)$. Далее записаны входные данные каждого набора.

Первая строка каждого набора состит из двух чисел N и M $(1 \leqslant N, M \leqslant 1000)$ — количество строк и столбцов в наборе.

Далее следуют N строк, в каждой из которых M целых чисел, где j-е число в i-й строке — число (1 или -1) в квадрате (i, j).

Формат выходных данных

Для каждого набора входных данных выведите «YES», если существует дорога из (1, 1) в (N, M), сумма которой равна 0, и «NO», если не существует.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод

```
1
3 1
-1
1
-1
```

Стандартный вывод

```
NO
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

#define N 1000

```

```
int mas[N][N], mn[N][N], mx[N][N];

int main() {
    int t, n, m;
    cin >> t;
    for (int t1 = 0; t1 < t; t1++) {
        cin >> n >> m;
        for (int i = 0; i < n; i++)
            for (int j = 0; j < m; j++) cin >> mas[i][j];
        mn[0][0] = mx[0][0] = mas[0][0];
        for (int i = 1; i < n; i++)
            mx[i][0] = mn[i][0] = mx[i - 1][0] + mas[i][0];
        for (int j = 1; j < m; j++)
            mx[0][j] = mn[0][j] = mx[0][j - 1] + mas[0][j];
        for (int i = 1; i < n; i++)
            for (int j = 1; j < m; j++) {
                mx[i][j] = max(mx[i - 1][j], mx[i][j - 1]) + mas[i][j];
                mn[i][j] = min(mn[i - 1][j], mn[i][j - 1]) + mas[i][j];
            }
        if (mx[n - 1][m - 1] % 2 || mn[n - 1][m - 1] > 0 ||
            mx[n - 1][m - 1] < 0)
            cout << "NO" << endl;
        else
            cout << "YES" << endl;
    }
}
```

Задача VI.1.1.4. Восстанови сигнал (20 баллов)

Представим, что общение между центром управления полётов (ЦУП) и спутником — это последовательность скобочек «(» и «)». Правильный сигнал — это последовательность скобочек «(» и «)», которую можно преобразовать в нормальное арифметическое выражение, используя «1» и «+». Например, если поступил сигнал `()`, то его можно преобразовать в `(1+1)`. Ещё один пример: из последовательности `(())` можно получить сигнал `(1+(1+1)+1)`.

Проблема в том, что при очередной передачи сообщения в ЦУП часть скобочек потерялась. Необходимо понять, можно ли однозначно восстановить правильный сигнал.

Формат входных данных

В первой строке записано число t — количество сигналов $1 \leqslant t \leqslant 5 \cdot 10^4$.

Далее некоторые скобочки заменены на знаки вопроса. Каждый символ — это «(», «)» или «?». Из каждого сигнала можно восстановить хотя бы 1 правильный сигнал.

Суммарная длина последовательности по всем наборами составляет не более $2 \cdot 10^5$.

Формат выходных данных

На каждый набор входных данных выведите «YES», если способ заменить знаки вопроса на скобки так, чтобы получился сигнал, единственный. Если существует больше одного способа, то выведите «NO»

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
2 (?)) ??????

Стандартный вывод
YES NO

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
    auto check = [](const string &s) {
        int bal = 0;
        for (char c : s) {
            if (c == '(') bal++;
            if (c == ')') bal--;
            if (bal < 0) return false;
        }
        return bal == 0;
    };
    int t;
    cin >> t;
    while (t > 0) {
        string s;
        cin >> s;
        vector<int> p;
        int open = s.size() / 2, close = s.size() / 2;
        for (int i = 0; i < s.size(); ++i) {
            if (s[i] == '?') p.push_back(i);
            if (s[i] == '(') open--;
            if (s[i] == ')') close--;
        }
        for (int i = 0; i < p.size(); ++i) {
            if (i < open)
                s[p[i]] = '(';
            else
                s[p[i]] = ')';
        }
        bool flag = true;
        if (open > 0 && close > 0) {
            swap(s[p[open - 1]], s[p[open]]);
            if (check(s)) flag = false;
```

```
        }
        if (flag == true)
            cout << "YES" << endl;
        else
            cout << "NO" << endl;
        t--;
    }
}
```

Задача VI.1.1.5. Спутниковые передатчики (30 баллов)

Перед изготовлением аппаратуры спутника тестируют его аппаратуру, например, передатчики информации.

Даны n передатчиков и m проводов между ними. Между двумя передатчиками A и B может быть:

- ни одного провода;
- провод из передатчика A в передатчик B;
- провод из передатчика B в передатчик A;
- провод из передатчика A в передатчик B и провод в обратную сторону.

Задача покрасить провода в k цветов так, чтобы не существовало циклов, состоящих из проводов одного цвета.

Найдите минимально возможное значение k.

Формат входных данных

В первой строке записаны два целых числа n и m ($2 \leqslant n \leqslant 5000$, $1 \leqslant m \leqslant 5000$) — количество передатчиков и проводов, соответственно.

Затем следуют m строк. В каждой строке два целых числа u и v ($1 \leqslant u, v \leqslant n$, $u \neq v$) — провод из передатчика u в передатчик v.

Формат выходных данных

В одной единственной строке выведите одно целое число k — минимальное количество цветов.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4 4 2 4 2 3 1 3 2 1

Стандартный вывод
1

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int N = 1000000;

int n, m;
vector<int> g[N];
int col[N];
bool flag;
void dfs(int v) {
    col[v] = 1;
    for (int k = 0; k < g[v].size(); k++) {
        int to = g[v][k];
        if (col[to] == 0)
            dfs(to);
        else if (col[to] == 1)
            flag = true;
    }
    col[v] = 2;
}

int main() {
    cin >> n >> m;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        int u, v;
        cin >> u >> v;
        --u, --v;
        g[u].push_back(v);
    }
    flag = false;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        if (col[i] == 0) dfs(i);
    cout << (flag ? 2 : 1);
    return 0;
}
```

Тестовые наборы для задач представленны по ссылке — https://disk.yandex.ru/d/j86RMCIK8t41dA.

Математика. 8–9 классы

Задача VI.1.2.1. (10 баллов)

Условие

Вася нашёл странную программу: после первого нажатия на клавишу Enter на экране появилось число 1234567654321. После второго нажатия это число заменилось на 1234567654321234567654321 и так далее: каждое новое нажатие предыдущее число заменяется на такое же, к которому в конце дополнительно приписано 234567654321. Сколько пятёрок содержится в таком числе, количество цифр которого равно 6001?

Решение

Каждый блок 234567654321 содержит ровно 2 пятёрки. В таком блоке всего 12 цифр. В числе длины 6001 (с 6001 цифрой в записи) после первой цифры будет содержаться $6000/12 = 500$ таких блоков. Значит, всего цифр 5 будет $1000 = 500 \cdot 2$.

Ответ: 1000.

Критерии оценивания

- Только ответ — 5 баллов.

Задача VI.1.2.2. (20 баллов)

Условие

За круглым столом сидят 500 рыцарей и лжецов. Любая (законченная) фраза лжеца — ложь, а рыцаря — правда. На вопрос: «Сколько лжецов сидит рядом?» каждый из присутствующих ответил «два». Какое максимальное количество лжецов могло быть за столом?

Решение

Отметим, что рядом со лжецом не может сидеть два других лжеца: могут либо один, либо ноль. Тогда легко видеть, что за столом не может быть групп лжецов из трёх и более человек сидящих подряд (иначе у второго из них с обеих сторон сосед — лжец). Кроме того, для любого рыцаря оба его соседа должны быть лжецы.

Разделим всех лжецов в круге на группы сидящих подряд (то есть минимально в такой группе может быть 1 человек, а максимально — 2). Также в каждую такую группу включим рыцаря, который следует сразу за данной группой (если считать по часовой стрелке). Тогда так как после каждой группы лжецов есть рыцарь, и так как далее за рыцарем сразу начинается другая группа лжецов, то очевидно, что все люди за столом оказались разбиты на группы. Количество таких групп не менее верхней целой части от $500/3$, то есть не менее 167. В каждой из этих групп ровно по одному рыцарю, значит рыцарей тоже не менее 167, а лжецов тогда не более $500 - 167 = 333$.

Остаётся проверить, что взяв 166 групп по 3 человека (два лжеца и один рыцарь) и одну группу из двух человек (один лжец, один рыцарь), а также «договорившись» со всеми лжецами, что они говорят «два», когда количество лжецов рядом с ними ноль или один, то получим как раз пример к найденному ответу.

Ответ: 333.

Критерии оценивания

- Только ответ – 5 баллов.
- Оценка – 10 баллов.
- Пример – 5 баллов.

Задача VI.1.2.3. (20 баллов)

Условие

10-угольной призмой в пространстве называется тело, содержащее два равных многоугольника $A_1A_2\ldots A_{10}$ и $B_1B_2\ldots B_{10}$, расположенные в пространстве так, что они во-первых, параллельны, во-вторых, не лежат в одной плоскости, в третьих — все четырёхугольники $A_iB_iB_{i+1}A_{i+1}$ являются параллелограммами и являются боковыми гранями этого многогранника (номер вершины 11 приравнивается к номеру 1).

Жук ползёт по проволочному каркасу десятиугольной призмы (то есть содержащему только точки — вершины многогранника и одномерные рёбра-отрезки между вершинами), нигде не разворачиваясь обратно и не проходя никакой участок дважды в одном направлении. Какой максимальный путь может совершить жук, если каждое из рёбер этой призмы по длине равно 10 см?

Решение

Количество рёбер в остове равно 30. При этом в каждую вершину входят 3 ребра. Отметим, что в произвольном маршруте «задействованная» степень каждой из вершин (кроме первой и последней в маршруте) – чётная. Таким образом, получается, что из общего количества рёбер будут использованы не все. Более того, если посчитать количество «половин» откинутых рёбер, то получится, что из изначальной конструкции требуется откинуть минимум $18 \cdot 0,5 = 9$ рёбер (от каждой вершины, которая не начальная и не конечная в маршруте, минимум одну половину ребра). То есть оставшаяся часть рёбер имеет суммарную длину не более $(30 - 9) \cdot 10 = 210$ см.

С другой стороны, маршрут $A_1A_2\ldots A_{10}A_1B_1B_2\ldots B_{10}B_1$ состоит как раз из 21 ребра общей длиной 210 см.

Ответ: 210 см.

Критерии оценивания

- Только ответ – 5 баллов.

- Оценка – 10 баллов.
- Пример – 5 баллов.

Задача VI.1.2.4. (25 баллов)

Условие

На доске записано число 123456789. Петя придумал математическую игру под названием «117»: он расставляет между некоторыми цифрами изначального числа знаки «плюс», а затем вычисляет записанное выражение. Например, одно из выражений, записанных Петей: $123+4+56+7+89=279$. Цель Пети, найти все способы, как получить в результате вычисления число 117. Помогите Пете найти все такие варианты (и докажите, что других нет).

Решение

Назовём расстановку знаков *хорошей*, если в результате получается сумма 117. Тогда отметим, что в хорошей расстановке нет кусков из трёх цифр изначального числа подряд (то есть среди полученных слагаемых нет трёхзначных). Действительно, самое маленькое возможное трёхзначное слагаемое, которое можно получить, равно 123. Это уже больше 117, а соответствующая сумма будет ещё больше — противоречие.

Также отметим, что в хорошей расстановке знаков не может быть трёх и более двузначных чисел. Докажем это: число $\overline{ab} = 10a + b = a + b + 9 \cdot a$. То есть сумма чисел на доске получится равной $1+2+3+\ldots+9+9(a+b+c)$, где a, b и c — цифры в разрядах десятков у двузначных чисел суммы. Сумма от 1 до 9 равна $10 \cdot 9/2 = 45$, а минимальное значение для $9(a+b+c) = 9(1+3+5) = 81$, а минимальное значение всего выражения равно $45 + 81 = 126$, что означает, что при трёх слагаемых сумма больше требуемой. Противоречие.

Пользуясь аналогичным разложением для двух двузначных слагаемых, имеем $1 + 2 + \ldots + 9 + 9(a + b) = 117$, то есть $9(a + b) = 117 - 45 = 72$, и $a + b = 8$. Легко видеть, что варианты $(1, 7), (2, 6), (3, 5)$ подходят, а других нет. Кроме того, аналогично получаем, что если среди слагаемых ровно одно двузначное, то в разряде десятков у этого числа стоит 8. Итого получаем 4 решения.

Ответ: 4 варианта: $12 + 3 + 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 1 + 2 + 34 + 56 + 7 + 8 + 9 = 1+23+4+5+67+8+9 = 1+2+3+4+5+6+7+89$.

Критерии оценивания

- Полный ответ — 10 баллов.
- За потерю каждого из вариантов — −2 балла.
- Оценка — 10 баллов.
- Пример — 5 баллов.

Задача VI.1.2.5. (25 баллов)

Условие

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC$ и $\angle A = 20°$. На стороне AC отмечена точка D такая, что $AD = BC$. Определите $\angle BDC$.

Решение

Отметим такую точку P, что ADP — равносторонний треугольник построенный наружу из треугольника ABC. Тогда угол BAP равен $20° + 60° = 80° = \angle ABC$.

Тогда легко видеть, что по двум сторонам и углу между ними равны треугольники BAP и ABC, следовательно, треугольник ABP равнобедренный. Точка D при этом находится на срединном перпендикуляре к отрезку AP, поэтому он является линией симметрии треугольника PBA. Отсюда легко видеть, что угол BDA равен углу BDP и вместе для них верно: $\angle BDA + \angle BDP + 60° = 360°$, то есть $2\angle BDA = 300$, то есть $\angle BDA = 150°$, а искомый угол $BDC = 180° - \angle BDA = 30°$.

Ответ: $30°$.

Критерии оценивания

- Только ответ — 5 баллов.
- Построена точка P — +5 баллов.

Математика. 10–11 классы

Задача VI.1.3.1. (15 баллов)

Условие

Найдите площадь фигуры, состоящей из таких точек (x, y), что их координаты удовлетворяют условию

$$\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \geqslant xy.$$

Решение

Область определения функции квадратный корень накладывает ограничения на величины $1 - x^2$ и $1 - y^2$. Обе эти величины должны быть неотрицательны. Для первой величины это означает, что $1 - x^2 \geqslant 0$, то есть $1 \geqslant x^2$. Что равносильно условию $|x| \leqslant 1$ или, эквивалентно, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Аналогично получаем такое же ограничение на y: $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Теперь перейдём непосредственно к решению неравенства. Далее считаем, что все рассматриваемые x, y уже удовлетворяют условию из предыдущего абзаца.

Во-перых, если правая часть неравенства неположительна (то есть $0 \geqslant xy$), то неравенство гарантированно выполняется: левая часть (квадратный корень) неотрицательна, правая часть неположительна. Это означает, что все пары x, y, удовлетворяющие условиям $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $1- \leqslant y \leqslant 1$; $xy \leqslant 0$, являются решениями исходного неравенства. Легко видеть, что решения неравенства $xy \leqslant 0$ распадаются на несколько зон: $x < 0, y > 0$; $x > 0, y < 0$; $x = 0$ и любое y; любое x, $y = 0$. Если пересечь эти варианты с условиями $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$, то получим две «зоны» решений на плоскости (x, y): это $-1 \leqslant x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 1$ и $0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 0$. Можно также сформулировать это следующим образом: множество решений данного решения во втором и в четвёртом квадрантах совпадают с точками квадрата $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$. Площадь этих областей в сумме равна 2.

Во-вторых, если $xy > 0$, то на области определения неравенство из условия равносильно квадрату этого неравенства:

$$(1 - x^2)(1 - y^2) \geqslant x^2 y^2.$$

Преобразуя это неравенство, получаем эквивалентное $1 \geqslant x^2 + y^2$, что является уравнением круга (с границей) с центром в начале координат и радиуса 1. Таким образом, получаем, что в первом и третьем квадранте решения этого уравнения совпадают с точками круга радиуса 1 с центром в начале координат. Площадь этих областей равна $\frac{2}{4}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$. Откуда итоговый ответ по всем четырём квадрантам получается равным $2 + \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $2 + \frac{\pi}{2}$.

Критерии оценивания

- Только ответ: 5 баллов.
- Ошибочное рассмотрение области определения — -5 баллов.
- Забыт случай отрицательной правой части при сравнении с квадратным корнем — -5 баллов.

Задача VI.1.3.2. (15 баллов)

Условие

Решите все натуральные решения уравнения $n + [\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] = 2023$.

Решение

Сначала «подберёмся поближе» к ответу при помощи оценок, а далее уточним ответ.

Величина $\left[\sqrt{2023}\right]$ равна 44, так как $45^2 = 2025$, а $44^2 = 1936$. Больше того, получается, что величина $[\sqrt{n}]$ равна 44 для всех n от 1936 до 2024 включительно.

Величина $\left[\sqrt[3]{2023}\right]$ равна 12, так как $12^3 = 1728$, а $13^3 = 2197$. То есть для всех чисел n от 1728 до 2196 включительно величина $[\sqrt[3]{n}]$ равна 12.

Тогда для числа $n = 1936$ выражение $n + [\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}]$ равно $1936 + 44 + 12 = 1992$. Таким образом, до суммы 2023 не хватает 31 единицы. Заметим, что для числа $1967 = 1936+31$ целая часть квадратного корня, как и целая часть кубического корня, не поменяются относительно 1936, откуда следует, что для n выражение из условия принимает требуемое значение.

Остаётся отметить, что функция $n + [\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}]$ является суммой строго возрастающей и двух нестрого возрастающих, то есть является строго возрастающей. Значит, решение, если есть, то единственно.

Ответ: 1967.

Критерии оценивания

- Только ответ 5 баллов.
- Необоснованные «точные» значения иррациональных чисел — -10 баллов.

Задача VI.1.3.3. (20 баллов)

Условие

Вася нашёл странную программу: после первого нажатия на клавишу Enter на экране появилось число 123454321. После второго нажатия к этому числу вместо последней единицы приписывается 12345432123454321 (то есть получается 1234543212345432123454321) и так далее: при каждом новом нажатии к предыдущему числу A вместо последней единицы приписывается число A, к которому к самому дополнительно приписано 23454321. Сколько четвёрок содержится в числе на экране после 100 нажатий на кнопку?

Решение

Обозначим число на экране после i-го нажатия p_i, а через $ch(n)$ обозначим количество четвёрок в десятичной записи натурального числа n. Тогда легко видеть, что $ch(p_1) = 2$, а также по условию $ch(p_{i+1}) = ch(p_i) + ch(p_i) + 2 = 2\,ch(p_i) + 2$. Используя эту же формулу для предыдущих индексов, имеем:

$$ch(p_i) = 2\,ch(p_{i-1}) + 2 = 2(2\,ch(p_{i-2}) + 2) + 2 = 4\,ch(p_{i-2}) + 4 + 2 = \ldots$$

$$= 2^{i-1}\,ch(p_1) + 2^{i-1} + 2^{i-2} + \ldots + 2^1 = 2^i + (2^i - 2) = 2^{i+1} - 2.$$

Ответ: $2^{101} - 2$.

Критерии оценивания

- Только ответ: 5 баллов.
- Найдена рекуррента: +5 баллов.
- Выписана «длинная» формула для общего члена (т. е. до вынесения суммы степеней двойки): +5 баллов.
- Доказана свёрнутая формула — полное решение.

Задача VI.1.3.4. (25 баллов)

Условие

Двое — Петя и Витя, играют в игру: в начале на столе лежат две кучки монет, в каждой по 2024 монеты. Игроки ходят по очереди, за свой ход можно либо взять из любой кучки произвольное (натуральное) количество монет, либо из обеих кучек ровно по одной монете. Тот, кто забирает последнюю монету со стола, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре и как ему это следует сделать?

Решение

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
5	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Составим таблицу так называемых выигрышных и проигрышных позиций в игре. То есть распределения возможных позиций по двум категориям: «выигрышные» — это игровые условия, начав игру с которых, первый игрок может гарантировать себе победу. «Проигрышные», соответственно, это те, начав игру с которых, при правильной игре противника, проигрываешь (то есть противник может гарантировать себе победу).

Легко видеть, что из выигрышной позиции должен быть хотя бы один ход в проигрышную, а из проигрышной позиции любой ход должен быть ходом в выигрышную позицию.

Начнём заполнять таблицу. По вертикали отложим количества монет в первой кучке, по горизонтали — во второй. В клетку (i, j) таблицы будем записывать 1, если соответствующие количества монет в кучках являются выигрышной позицией (для того, кто стартует с такого количества), 0 — в обратном случае (то есть если проигрышная).

Кучки равноценны, поэтому позиции (a, b) и (b, a) будут одинакового типа (или обе выигрышные, или обе — проигрышные). Тогда легко видеть, что варианты $(n, 0)$, $(0, m)$ и $(1, 1)$ являются выигрышными для натуральных n, m (так как можно за 1 ход выиграть).

Сформулируем правила на предмет того, как будут вставляться конкретные 0 или 1 в данную таблицу: клетка для количеств (i, j) в таблице заполняется нулём (то есть проигрышная позиция), если все позиции, достижимые за один ход — выигрышные, то есть если выше в том же столбце, левее в той же строке, а также по диагонали налево–наверх (на одну клетку) стоят только единицы. Если же в какой-то из этих клеток стоит 0, то позиция (i, j) является выигрышной.

Тогда легко понять, что варианты $(1, 2)$ и $(2, 1)$ — проигрышные позиции. Далее позиции $(2, 2)$, а также $(2, k)$ и $(k, 2)$, где $k > 2$ — натуральное, все являются выигрышными. Далее, $(3, 3)$ — проигрышная, так как все позиции вида $(3, i)$, $(i, 3)$ где $0 < i < 3$ и $(2, 2)$ — выигрышные.

Отдельно отметим, что в каждой строке и в каждом столбце может стоять не более одного нуля, так как, в силу правил игры, ноль с бОльшим индексом будет означать проигрышную позицию, но из неё за один ход можно будет попасть в другую проигрышную позицию — другой ноль в этой же строке (столбце), но с индексом меньше.

Далее легко убедиться, что $(4, 4)$ выигрышная (можно в проигрышную $(3, 3)$ пойти), а вот $(4, 5)$ и $(5, 4)$ — проигрышные; $(6, 6)$ тоже проигрышная. Таким образом, легко убедиться, что в первых семи строках и столбцах прогрышные позиции есть только в выделенных квадратах 3×3 на диагонали. Причём второй такой квадрат восстановился по первому квадрату (а также единицам в тех строках и столбцах) таким же, как первый. Отсюда элементарно вытекает, что далее эти квадраты также будут повторяться, так как правила восстановления каждой конкретной клетки при сдвиге всей таблицы на вектор $(3, 3)$ сохранятся.

Остаётся отметить, что 2024 даёт остаток 2 при делении на 3, значит это будет клетка с единицей — выигрышная для первого игрока.

Ответ: первый.

Критерии оценивания

- Только ответ: 2 балла.
- Используется по существу (и в правильном значении), но без определения понятие выигрышных/проигрышных позиций — +3 балла.
- Сформулировано характеристическое свойство проигрышных и выигрышных позиций (как определять по предыдущим проигрышным/выигрышным) — +10 баллов.

Задача VI.1.3.5. (25 баллов)

Условие

Коля изобрёл новый вид рыболовецкой сети: сначала берётся заготовка из 2023 узлов, каждые 2 из которых соединены одной отдельной нитью. Затем Коля выбирает 4 узла, которые соединены друг с другом нитями по кругу (то есть можно так назвать узлы буквами Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4, что между ними найдутся нити $Y_1Y_2, Y_2Y_3, Y_3Y_4, Y_4Y_1$) и перерезает одну из этих четырёх нитей. Далее Коля продолжает перерезать нити по этому же правилу, пока в заготовке не останется минимально возможное количество целых нитей. Такую конструкцию Коля и называет сетью. Какое количество целых нитей содержится в Колиной сети?

Решение

Утверждение 1: *«После любого количества Колиных операций сеть остаётся связной (то есть одним куском)»*. Утверждение очевидно, так как при каждой такой операции разрезается одна перемычка между узлами из замкнутой цепочки из 4-х таких перемычек. То есть после любой одной операции связность сети сохраняется. Значит и после любого числа операций она сохранится.

Утверждение 2: *«После каждой описанной операции в сети будут оставаться замкнутые цепочки с нечётным количеством перемычек»*. Пусть при некоторой такой операции замкнутые цепочки нечётной длины исчезли. Значит, перед выполнением этой операции была некоторая замкнутая цепочка с нечётным числом перемычек, а после разрезания её уже не было. По условию, разрезать перемычку можно только если она была одной из перемычек замкнутой цепочки вида $Y_1Y_2, Y_2Y_3, Y_3Y_4, Y_4Y_1$, которая всё ещё есть в сети. Но тогда мы можем рассмотреть три перемычки такого цикла и добавить их к замкнутой цепочке, которая разрушилась на этом ходу. Длина такой новой цепочки также нечётна. То есть после одной такой операции в сети останутся циклы нечётной длин. Значит, они останутся и при многократном совершении операции.

Таким образом, в момент, когда больше нельзя будет совершить ни одной операции, сеть будет оставаться связной (то есть от любого узелка можно будет добраться до любого другого двигаясь строго по перемычкам), плюс в ней будет хотя бы один цикл (нечётной длины).

То есть если разрезать перемычку существующей циклической цепочки в сети, то получится всё ещё связная конструкция. По теореме из теории графов, в такой сети будет перемычек (рёбер) не менее, чем количество вершин минус один. Соответственно, если теперь вернуть ребро обратно, то общее количество рёбер — перемычек — будет не менее количества узлов сетки — вершин.

Теперь покажем, что оставить 2023 перемычки — возможно. Далее для стандартности обозначений будет использовать «рёбра» вместо перемычки и «вершины» вместо узлов. Занумеруем все вершины числами от 1 до 2023. Легко показать, что для номеров i от 1 до 2019 можно шаг за шагом удалить все рёбра, идущие из i-ой вершины в вершины с бОльшим номером, кроме ребра $i, i+1$. Из последних же четырёх вершин достаточно выкинуть два ребра. В результате получится пример на 2023 рёбер.

Ответ: 2023.

Критерии оценивания

- Только ответ 5 баллов.
- Доказана связность графа — +5 баллов.
- Доказано, что сохраняется хотя бы один цикл — +8 баллов.
- Пример — +7 баллов.