

Технологии беспроводной связи

2022/23 учебный год

Заключительный этап

Предметный тур

Информатика. 8–11 класс

Задача VI.1.1.1. Минимальное время спуска Лунахода-1 с горы (10 баллов)

Лунаход-1 оказался на вершине лунной горы. При сканировании склона горы сенсоры выдали следующую карту склона горы, где числами обозначено, сколько секунд требуется на этот участок маршрута. Спуск происходит сверху вниз на один из нижних участков. Пример наиболее короткого маршрута выделен красным цветом, сумма чисел = 10.

```
1
2 4
7 3 6
9 5 4 7
```

Напишите программу, рассчитывающую минимальное время спуска Лунахода-1 (сумму чисел в пути с вершины до основания).

Формат входных данных

Строки из целых чисел в интервале от 01 до 99, разделённые пробелом.

Формат выходных данных

Сумма чисел в пути с вершины до основания (одно число).

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
75
95 64
17 47 82
18 35 87 10
20 04 82 47 65
19 01 23 75 03 34
88 02 77 73 07 63 67
99 65 04 28 06 16 70 92
41 41 26 56 83 40 80 70 33
41 48 72 33 47 32 37 16 94 29
53 71 44 65 25 43 91 52 97 51 14
70 11 33 28 77 73 17 78 39 68 17 57
91 71 52 38 17 14 91 43 58 50 27 29 48
63 66 04 68 89 53 67 30 73 16 69 87 40 31
04 62 98 27 23 09 70 98 73 93 38 53 60 04 23

Стандартный вывод
266

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
1 import sys
2 line = sys.stdin.read().split('\n')
3 way_length = 0
4 for l in line:
5     way_length += min(list(map(int, l.split(' '))))
6 print(way_length)
```

Задача VI.1.1.2. Средневзвешенное абсолютное значение (20 баллов)

Пусть на автономный подводный аппарат передано N условных значения для расчета направления движения автономного подводного аппарата под водой. Для движения автономный подводный аппарат должен определить взвешенного среднего абсолютного значения принятых параметров, используя следующую формулу для весовых коэффициентов

$$\omega_n = \begin{cases} 1,5 & \text{если } 0,25 < n \leq 0,75N \\ 0,5 & \text{иначе} \end{cases} \quad (\text{VI.1.1})$$

И формулу взвешенное среднее абсолютное значение вычисляется по формуле:

$$y = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega_n |x_n|.$$

Задача: написать программу для вычисления взвешенного среднего абсолютного значения для движения автономного подводного аппарата.

Формат входных данных

В строке через пробел записаны N вещественных числа не более чем с одним знаком после точки в интервале от -100 до $+100$.

Формат выходных данных

Вывести одно вещественное число ответ к задаче. Ответ будет считаться верным, если модуль разности вашего ответа и ответа жюри будет различаться не более чем на 10^{-5} .

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
-2.4 -0.8 1.6 3.8
Стандартный вывод
1.675

Пример №2

Стандартный ввод
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
Стандартный вывод
0.25

Пояснения к примеру

Ответ в первом примере получается в результате следующих вычислений:

$$\frac{0,5 \cdot |-2,4| + 1,5 \cdot |-0,8| + 1,5 \cdot |1,6| + 0,5 \cdot |3,8|}{4} = \frac{1,2 + 1,2 + 2,4 + 1,9}{4} = 1,625.$$

Ответ во втором примере получается в результате следующих вычислений:

$$\begin{aligned} & \frac{0,5 \cdot |0,1| + 1,5 \cdot |0,2| + 1,5 \cdot |0,3| + 0,5 \cdot |0,4| + 0,5 \cdot |0,5|}{5} = \\ & = \frac{0,05 + 0,3 + 0,45 + 0,2 + 0,25}{5} = 0,25. \end{aligned}$$

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
1 import sys
2 data = sys.stdin.read()
3 val = list(map(float, data.split(' ')))
4 s_val = 0
5 for i, j in enumerate(val):
6     s_val += abs(j) * (1.5 if (0.25*len(val) < i + 1 <= 0.75*len(val)) else 0.5)
7 print (round(s_val/len(val),3))
```

Задача VI.1.1.3. Управление компьютерной сетью (40 баллов)

Вы находитесь в нулевом узле управления компьютерной сетью с узлами обозначенными целыми числами интервале от 0 до 8. На рисунке для примера линиями между узлами показаны соединения узлов между собой, а сверху линий целыми числами в интервале от 0 до 19 указано время передачи сообщения от одного узла до другого.

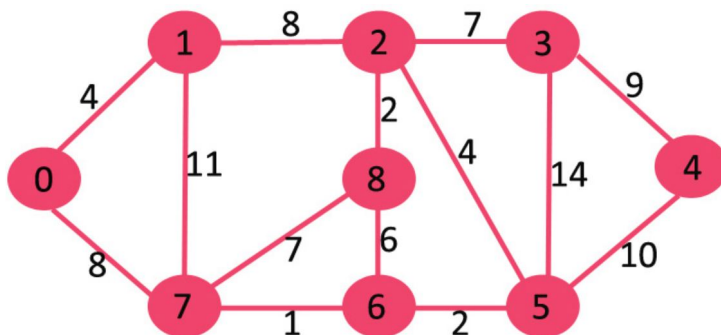


Рис. VI.1.1. Пример компьютерной сети

Для управления сетью необходимо написать программу и определить минимальный путь от узла 0 до каждого из узлов сети и время передачи сообщения.

Формат входных данных

9 строк по 9 чисел в каждой строке (целые числа в диапазоне от 0 до 20, разделённые пробелом).

Формат выходных данных

Узел соединения начиная в интервале от 0 до 8 и минимальное время передачи сообщения целое число в интервале от 0 до 100 (два целых числа, разделенные пробелом).

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод								
0	4	0	0	0	0	0	8	0
4	0	8	0	0	0	0	11	0
0	8	0	7	0	4	0	0	2
0	0	7	0	9	14	0	0	0
0	0	0	9	0	10	0	0	0
0	0	4	14	10	0	2	0	0
0	0	0	0	0	2	0	1	6
8	11	0	0	0	0	1	0	7
0	0	2	0	0	0	6	7	0

Стандартный вывод

```
0 0
1 4
2 12
3 19
4 21
5 11
6 9
7 8
8 14
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
1 import sys
2 lines = sys.stdin.read().split('\n')
3 class Graph():
4     def __init__(self, vertices):
5         self.V = vertices
6         self.graph = [[0 for column in range(vertices)]
7                       for row in range(vertices)]
8     def printSolution(self, dist):
9         for node in range(self.V):
10            print(node, dist[node])
11     def minDistance(self, dist, sptSet):
12         min = 1e7
13         for v in range(self.V):
14             if dist[v] < min and sptSet[v] == False:
15                 min = dist[v]
16                 min_index = v
17         return min_index
18     def dijkstra(self, src):
19         dist = [1e7] * self.V
20         dist[src] = 0
21         sptSet = [False] * self.V
22         for cout in range(self.V):
23             u = self.minDistance(dist, sptSet)
24             sptSet[u] = True
25             for v in range(self.V):
26                 if (self.graph[u][v] > 0 and
27                     sptSet[v] == False and
28                     dist[v] > dist[u] + self.graph[u][v]):
29                     dist[v] = dist[u] + self.graph[u][v]
30             self.printSolution(dist)
31 g = Graph(9)
32 g.graph = [list(map(int, l.split(' '))) for l in lines]
33 g.dijkstra(0)
```

Задача VI.1.1.4. Сигнал от внеземной цивилизации (30 баллов)

Для обработки сигнала, принятого от внеземной цивилизации, необходимо провести свертку сигнала с откликом системы обработки сигналов. Входной сигнал и отклик системы представлены в виде одномерного массива чисел. Длина сигнала

ла больше чем длина отклика. Входной сигнал подается в виде строки значений, разделенных пробелами. Свертка определяется по следующей формуле:

$$y[n] = x[n] \cdot h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m],$$

где $y[n]$ — результат сверки сигналов;

$h[n]$ — функция отклика (окно);

$x[n]$ — функция (входной сигнал);

m — длина функции отклика (окна);

n — длина входного сигнала.

Отсчеты отклика системы определяются пятью значениями косинусоидальной функции в интервале от $-0,5\pi$ до $0,5\pi$ включительно, с шагом $0,25\pi$. Выходные данные округлить до целого значения. Обратите внимание, что свертка определяется только в диапазоне от 4 до n , где n — длина входного сигнала, а 4 обусловлено длиной отклика системы и интервал суммирования — по длине отклика от 0 до 4.

Формат входных данных

Значения сигнала в виде целого числа в интервале от 0 до 1000, разделённые пробелом, всего от 40 до 41 значения.

Формат выходных данных

Значения сигнала, полученного по формуле в виде целых чисел округленные по формуле до целого значения в интервале от 0 до 1000, разделённых переносом строки.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод																				
156	15	194	70	152	77	165	249	8	242	238	145	13	48	142	108	118	95	116	184	
72	5	25	61	6	85	9	90	44	218	0	131	94	255	176	161	164	129	106	11	44

Стандартный вывод

```
315
256
301
396
371
355
416
512
322
149
158
252
292
262
260
313
317
206
74
72
83
109
96
133
127
262
249
247
197
367
446
470
401
369
320
205
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
1 import sys
2 import math
3 sig = list(map(int, sys.stdin.read().split(' ')))
4 pos = list(range(-2, 3))
5 response = [math.cos((x / 2) * (math.pi / 2)) for x in pos]
6 conv = (len(sig) - len(response)) * [0]
7 for l in range(len(conv)):
8     for i in range(len(response)):
9         conv[l] += sig[l - i + len(response)] * response[i]
10 for i in conv:
11     print(round(i))
```

Тестовые наборы для задач представлены по ссылке — <https://disk.yandex.ru/d/nbWVPWOCZJ1NwA>.

Математика. 8–9 классы

Задача VI.1.2.1. Квадрат из квадратов (10 баллов)

Алеше в школе беспроводной связи на уроке квадратов дали задание.

Если представить, что у тебя неограниченное количество квадратов различных натуральных размеров сторон, то ты бы смог собрать квадрат из одинакового количества квадратов разного размера?

Помогите Алеше решить задание. Если возможно, то достаточно предоставить пример с объяснением.

Решение

Один из вариантов решения, могут быть другие.

2	2	1	1	2	2
		1	1		
2	2	1	1	2	2
		1	1		
2	2	1	1	2	2
		1	1		
2	2	1	1	2	2
		1	1		
2	2	1	1	2	2
		1	1		

20 квадратов со стороной 2

20 квадратов со стороной 1

Критерии оценивания

1. 5 баллов — за правильный ответ без графического представления.
2. 5 баллов — за графический ответ без объяснения.

Задача VI.1.2.2. (20 баллов)

Юные пионеры нашего кружка — Леонид, Зина, Игорь, Соня, Владимир и Григорий изготовили скворечники для благоустройства школьного двора. Леонид сделал

столько же скворечников, сколько и Зина. Если число скворечников, изготовленных Григорием, сложить с числом скворечников, сделанных Соней, то получившаяся сумма будет равна числу скворечников, построенных Игорем. Владимир изготовил 2 скворечника. Если из числа скворечников, построенных Григорием, вычесть число скворечников, сделанных Зиной, то получится наименьшее число скворечников, изготовленных одним пионером. Число скворечников, сделанных Соней, меньше, чем число скворечников, которые построил Леонид, но больше числа скворечников, изготовленных Владимиром.

Пионеры, изготовивший наименьшее и наибольшее число скворечников, единственные и не совпадают. Сколько скворечников изготовил каждый из пионеров, если известно, что наибольшее число скворечников, изготовленное одним из них, равно 10, а всего было изготовлено 32 скворечника?

Решение

Сначала установим, кто из пионеров изготовил наименьшее количество скворечников. Это не Леонид и не Зина, так как они изготовили по одинаковому числу скворечников, а по условию задачи наименьшее число скворечников сделано одним; это не Игорь: он изготовил столько скворечников, сколько изготовили вдвоём Соня и Григорий; это не Григорий: он построил скворечников больше, чем Зина. Остаются Соня и Владимир. Но мы знаем, что Соня изготовила скворечников больше, чем Владимир; следовательно, наименьшее число скворечников (2 скворечника) построил Владимир. Теперь устанавливаем, кто сделал наибольшее количество скворечников. Это, очевидно, не Леонид и не Зина, потому что они сделали по равному числу скворечников, а мы знаем, что наибольшее число скворечников изготовлено кем-то одним из пионеров. Это не Соня: она сделала скворечников меньше, чем Леонид. Это не Григорий: он сделал меньше, чем Игорь. Значит 10 скворечников изготовил Игорь. Кто изготовил остальные 20 скворечников из 32? Соня и Григорий изготовили вместе 10 скворечников, значит, Зина и Леонид также изготовили вместе 10 штук. А так как, они изготовили по одинаковому числу скворечников, то, следовательно, каждый из них сделал по 5 скворечников. Так как Зина построила 5 скворечников, а Владимир — 2 скворечника, следовательно, Григорий сделал 7 скворечников, а Соня изготовила 3 скворечника.

Вариант решения в виде системы

Введем неизвестные для изготовителей скворечников

Леонид	Зина	Игорь	Соня	Владимир	Григорий
x	y	$y + z$	z	2	y

По условию дано, что $y - x = 2$, то есть минимальное кол-во скворечников, сделанных одним человеком. Значит $y > x$, так как минимальное кол-во натуральное.

Также нам известно, что $x > z > 2$, а это значит $2 < z < x < y$. А это значит, что максимальное количество скворечников у Игоря ($y + z$).

$$\begin{cases} y + z = 10 \\ y - x = 2 \\ 2x + 2(y + z) = 30 \end{cases} \quad (\text{VI.1.2})$$

А если значит $x = 5$, $y = 7$, $z = 3$.

Ответ: Леонид — 5; Зина — 5; Игорь — 10; Соня — 3; Владимир — 2; Григорий — 7.

Критерии оценивания

1. 5 баллов — за правильные формулы.
2. 10 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 5 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.

Задача VI.1.2.3. (20 баллов)

Николай взял в коробку 26 конденсаторов одного номинала и контейнер для последующего монтажа на плату передатчика. Один конденсатор весит 0,645 грамма. При пересчете конденсаторов Николай обнаружил в контейнере 27 конденсаторов. Один из конденсаторов остался после предыдущего монтажа, но он отличается по номиналу и его монтаж может привести к неисправности радиопередатчика. Конденсаторы не имели маркировки из-за их малого размера и внешне были похожи. Посмотрев документацию Николай определит, что оставшийся конденсатор тяжелее остальных конденсаторов на 0,854 грамма.

У Николая есть рычажные весы, с двумя одинаковыми чашами на двух концах рычага. Как Николаю определить конденсатор, оставшийся после предыдущей пайки, за 3 взвешивания?

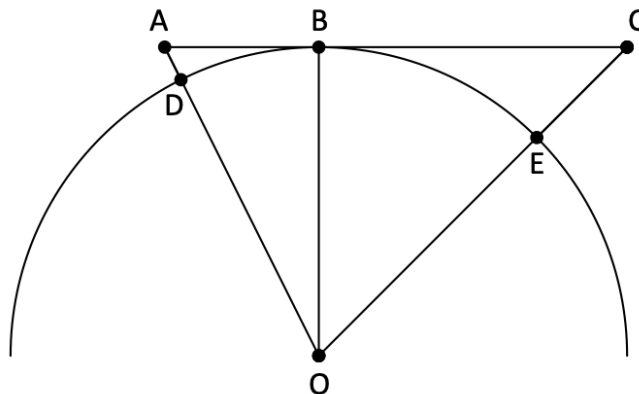
Решение

Разделим 27 на 3 группы по 9 конденсаторов. Берем 2 любые группы, если они равны, то значит дальше будем исследовать группу, которую не взвешивали, а если одна чаша перевешивает, то ту группу, на которой перевесили весы. Далее повторяем такую же операцию с 3 группами по 3 конденсатора, а дальше и с 3 группами по 1 конденсатору.

Критерии оценивания

1. 5 баллов — за правильные формулы.
2. 10 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 5 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.

Задача VI.1.2.4. (20 баллов)



Дано сторона $CE = 18$, $BO = 40$, $AC = 117$. Найдите сторону AD , с учетом что большую часть треугольник находится внутри круга.

Примечание: все отрезки являются целыми числами.

Решение

$$\begin{aligned}AD &= AO - DO \\AO &= \sqrt{AB^2 + BO^2} \\AB &= AC - BC \\BC &= \sqrt{CO^2 - BO^2} \\CO &= CE + EO\end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}DO &= BO = EO, \text{ как радиусы.} \\CO &= CE + EO = 18 + 40 = 58 \\BC &= \sqrt{CO^2 - BO^2} = \sqrt{58^2 - 40^2} = 42 \\AB &= AC - BC = 117 - 42 = 75 \\AO &= \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{75^2 + 40^2} = 85 \\AD &= AO - DO = 85 - 40 = 45\end{aligned}$$

Ответ: $AD = 45$.

Критерии оценивания

1. 5 баллов — за правильные формулы.
2. 10 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 5 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.

Задача VI.1.2.5. (30 баллов)

Беспроводной город состоит из бесконечного количества участков в виде треугольников. Все участки разные, но, что удивительно, имеют равную площадь. Докажите, что минимальное количество забора, чтобы огородить участок по его периметру необходимо участку в виде правильного треугольника.

Решение

Примем стороны треугольника за a , b , c .

Тогда имеем по формуле Герона:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

где p — полупериметр.

А это приводит по неравенству Коши к следующему неравенству:

$$p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p \frac{(p-a+p-b+p-c)^3}{3} = \frac{p^4}{27}.$$

Это значит, что $p \geq \sqrt{S} \sqrt[4]{27}$.

И равенство, то есть минимальный периметр, достигается только при равенстве $p-a = p-b = p-c$, что значит $a = b = c$, а значит минимальный периметр у правильного треугольника.

Критерии оценивания

1. 10 баллов — за правильные формулы.
2. 10 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 10 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.

Математика. 10–11 классы

Задача VI.1.3.1. (10 баллов)

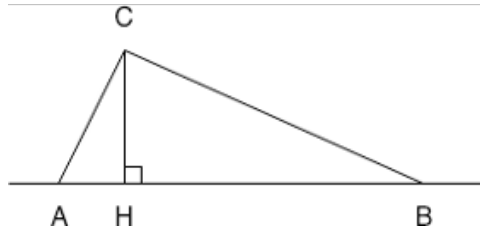
В Сирийской арабской республике, находится 3 города: Латакия, Алеппо и Дейр-эз-Зор. Нами получены сведения о расстоянии между городами в условных единицах. Таким образом расстояние между Латакией и Дейр-эз-Зор составляет 25 условных единиц, между Алеппо и Дейр-эз-Зор расстояние равняется 24 условным единицам и расстояние между Алеппо и Латакией равняется 7 условных единиц расстояния. Латакия и Дейр-эз-Зор соединены прямой дорогой от города до города. Тебе поставлена задача: найти кратчайший путь между этой прямой междугородней дорогой и городом Алеппо. Расстояние в ответе стоит приводить с точностью до двух цифр после запятой.

Решение

Для простоты восприятия заменим название сирийских городов на буквенное обозначение.

Латакия = A ; Алеппо = C ; Дейр-эз-Зор = B .

Построим треугольник по заданным параметрам.



Кратчайший путь будет соответствовать длине перпендикулярной прямой опускающейся от точки C к прямой AB . Введем точку для построения перпендикуляра и назовем ее H .

Исходя из сторон треугольника ABC , делаем вывод что треугольник прямоугольный, Прямой угол вершины подтверждается выражением: C ($7^2 + 24^2 = 25^2$). CH — высота. Исходя из свойств прямоугольного треугольника, $CH = AC \cdot BC / AB = 6,72$.

Ответ: 6,72.

Критерии оценивания

1. 3 баллов — за правильные формулы.
2. 5 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 3 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.

Задача VI.1.3.2. (20 баллов)

В одной из лабораторий ТБС было расположено несколько постов охраны с наблюдателями. Наблюдатели ведут подсчет людей которых замечают. Таким образом руководство исследовательской лаборатории отслеживает общее количество людей, находящихся в здании. Первый наблюдатель сказал, что за всю неделю кроме воскресения здание лаборатории посетили 510 человек. Второй наблюдатель сообщил о 392 людях за неделю, но с четверга по воскресенье подсчет на его посту не вёлся. Зато пятый пост с четверга по субботу насчитал 118 человек. Третий пост работал во вторник и пятницу и сообщил о 220 людях, а четвертый пост работал в среду, четверг и субботу и сообщил о 208 посетителях. Стоит отметить, что в воскресенье никого в здании лаборатории не было.

Определить, какое количество человек посетили здание лаборатории в понедельник?

Решение

Табличное представление количества посетителей лаборатории за неделю.

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Всего
1 Наблюдатель	+	+	+	+	+	+	-	510
2 Наблюдатель	+	+	+	-	-	-	-	392
3 Наблюдатель	-	+	-	-	+	-	-	220
4 Наблюдатель	-	-	+	+	-	+	-	208
5 Наблюдатель	-	-	-	+	+	+	-	118

Кроме понедельника, об остальных днях сообщали 3 наблюдателя. Этот факт говорит о двойном учете людей четырьмя крайними наблюдателями во все дни кроме понедельника. Воскресение исключаем, поскольку людей в этот день не было. Значит, необходимое нам количество людей в понедельник найдем из выражения:

$$2 \cdot 510 - (392 + 220 + 208 + 118) = 1020 - 938 = 82.$$

Ответ: в офисе компании в понедельник побывало 82 человека.

Критерии оценивания

1. 5 баллов — за правильные формулы.
2. 10 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 5 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.

Задача VI.1.3.3. (20 баллов)

Николай рассыпал 72 радиодеталей. Оказалось, что одна радиодеталь другого номинала (фальшивая), для того чтобы ее найти маркировку детали нужно смотреть под микроскопом. На что потребуется достаточно большое количество времени. У Николая есть рычажные весы, с двумя одинаковыми чашами на двух концах рычага. Как Николаю определить фальшивую радиодеталь и то в какую сторону по весу она отличается от обычных (больше или меньше) если известно, что это радиодеталь отличается по весу чем обычные, но неизвестно в какую сторону, за 5 взвешиваний?

Решение

Разобьем все детали на 3 кучки по 24 радиодетали. Пронумеруем без потери общности и сделаем 2 взвешивания: первая и вторая кучка, и первая, и третья.

Рассмотрим следующие варианты:

- $=, >$ — значит третья кучка содержит фальшивую, причем фальшивая меньше, чем обычная
- $=, <$ — значит третья кучка содержит фальшивую, причем она больше, чем обычная
- $>, =$ — значит вторая кучка содержит фальшивую, причем она меньше, чем обычная
- $<, =$ — значит вторая кучка содержит фальшивую, причем она больше, чем обычная
- $<, <$ — значит первая кучка содержит фальшивую, причем она меньше, чем обычная

- $>, >$ — значит первая кучка содержит фальшивую, причем она больше, чем обычная
- $=, =$ — не может быть, потому что в одной из кучек должна быть обязательно фальшивая монета
- $<, >$ — не может быть, потому что в таком случае $k_3 > k_1 > k_2$, но фальшивая радиодеталь одна
- $>, <$ — аналогично предыдущему

Таким образом за 2 взвешивания мы знаем кучку из 24 радиодеталей, в которой находится фальшивая деталь, а также знаем в какую сторону отличается фальшивая по отношению к обычной.

Далее 24 радиодетали разбиваем на 3 кучки из 8 монет и сравниваем 2 из этих кучек. При равенстве дальше исследоваться будет кучка, которая не участвовала в сравнении. Если же ситуация неравенства чаш, то берем ту кучку, которая соответствует **фальшивой детали**. То есть если мы узнали на предыдущем шаге, что фальшивая радиодеталь меньше весит, чем обычная, то мы возьмем кучку, которая весит меньше.

Теперь 8 радиодеталей разобьем на 3 кучки по 3, 3, 2 радиодетали. Аналогичное взвешивание и выбор изучаемой кучки проводим с кучками по 3 радиодетали.

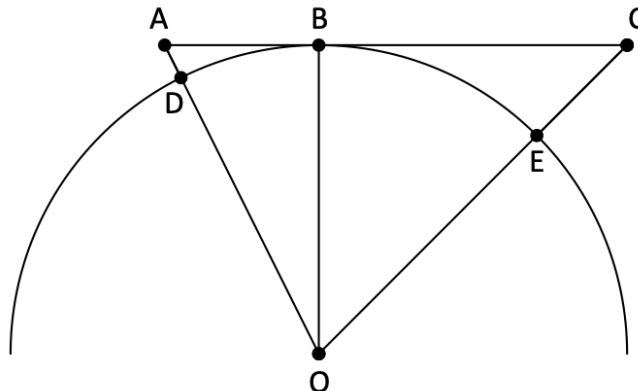
На данном этапе у нас есть кучка из 2 или 3 радиодеталей, в которой есть фальшивая радиодеталь и мы знаем в какую сторону она по весу отличается от обычной

С помощью пятого взвешивания мы находим фальшивую радиодеталь среди обычных.

Критерии оценивания

1. 5 баллов — за правильные формулы.
2. 10 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 5 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.

Задача VI.1.3.4. (20 баллов)



Дано сторона $CE = 18$, $BO = 40$, $AC = 117$. Найдите сторону AD , с учетом что большую часть треугольник находится внутри круга.

Примечание: все отрезки являются целыми числами.

Решение

$$\begin{aligned}AD &= AO - DO \\AO &= \sqrt{AB^2 + BO^2} \\AB &= AC - BC \\BC &= \sqrt{CO^2 - BO^2} \\CO &= CE + EO\end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}DO &= BO = EO, \text{ как радиусы.} \\CO &= CE + EO = 18 + 40 = 58 \\BC &= \sqrt{CO^2 - BO^2} = \sqrt{58^2 - 40^2} = 42 \\AB &= AC - BC = 117 - 42 = 75 \\AO &= \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{75^2 + 40^2} = 85 \\AD &= AO - DO = 85 - 40 = 45\end{aligned}$$

Ответ: $AD = 45$.

Критерии оценивания

1. 5 баллов — за правильные формулы.
2. 10 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 5 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.

Задача VI.1.3.5. (30 баллов)

Беспроводной город состоит из бесконечного количества участков в виде треугольников. Все участки разные, но, что удивительно, имеют равную площадь. Докажите, что минимальное количество забора, чтобы огородить участок по его периметру необходимо участку в виде правильного треугольника.

Решение

Примем стороны треугольника за a, b, c .

Тогда имеем по формуле Герона:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

где p — полупериметр.

А это приводит по неравенству Коши к следующему неравенству:

$$p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p \frac{(p-a+p-b+p-c)^3}{3} = \frac{p^4}{27}.$$

Это значит, что $p \geq \sqrt[3]{S^4 \sqrt{27}}$.

И равенство, то есть минимальный периметр, достигается только при равенстве $p-a = p-b = p-c$, что значит $a = b = c$, а значит минимальный периметр у правильного треугольника.

Критерии оценивания

1. 10 баллов — за правильные формулы.
2. 10 баллов — за правильный ответ без объяснений.
3. 10 баллов — за правильные формулы, но ошибку в расчетах.