Умный город

2022/23 учебный год

Заключительный этап

Предметный тур

Информатика. 8–11 класс

Задача VI.1.1.1. Успеть за 60 секунд (16 баллов)

Петя готовится к олимпиаде и решает задачи по физике, математике и информатике. Всего соответственно n, m, k задач. На первую задачу по каждому предмету Петя тратит n_1 m_1 k_1 минут соответственно, но потом он начинает уставать и тратить на каждую следующую задачу на 1 минуту больше.

Однако Петя может переключиться с предмета на предмет, тогда усталость у Пети как рукой снимает.

Например, если Петя решил три задачи по физике, потом две задачи по математике, а потом еще две задачи по физике, то всего он потратил:

$n_1 + (n_1 + 1) + (n_1 + 2)$ *минут на три задачи по физике;*

$m_1 + (m_1 + 1)$ *минут на две задачи по математике;*

$n_1 + (n_1 + 1)$ *минут на две задачи по физике.*

Помогите Пете решить все задачи за минимальное время.

Формат входных данных

В первой строке входных данных содержатся три целых числа n, m, k ($0 \leqslant n, m, k \leqslant 100$). Вторая строка входных данных содержит три целых числа n_1, m_1, k_1 ($1 \leqslant n_1, m_1, k_1 \leqslant 100$).

Формат выходных данных

Выведите единственное целое число — минимальное время, которое Петя потратит на решение всех задач.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`1 3 5` `3 4 5`

Стандартный вывод
`40`

Пример №2

Стандартный ввод
0 4 1 2 5 2

Стандартный вывод
24

Пример №3

Стандартный ввод
0 4 2 2 5 2

Стандартный вывод
25

Решение

Замечание 1:

n_1, m_1, k_1 не имеют значительной роли (кроме непосредственно формирования величины ответа), роль играет порядок выполнения задач разных типов.

Без ограничений общности примем $n \geqslant m \geqslant k$.

Оптимальная стратегия заключается в том, чтобы выполнять как можно меньше задач одного предмета подряд.

Пример, как это можно сделать пока просто конструктивно (также можно доказать, что он дает минимальный ответ): чередуем задачи по типам

$$n - m - k - n - m - k - ...,$$

т. к. $n \geqslant m \geqslant k$, то в конце будет некоторое число n, возможно нулевое (если $n = m$), сделаем так, что в конце не более одной задачи типа n, остальные задачи «запомним» — теперь их требуется распределить между группами задач этого же типа n, причем...

Замечание 2:

Пусть имеется несколько групп (несколько подряд решенных, возможно 1) задач одного типа, причем группа с минимальным числом задач состоит из min задач, а с максимальным из max задач. Тогда наиболее оптимальным (минимизирующим) ответ распределением является такое, что max – min минимально среди всех возможных распределений.

Напоминание: в изложенном ниже все еще предполагается $n \geqslant m \geqslant k$.

Всего у нас $m + k + 1$ групп если $n > m + k + 1$, иначе ничего распределять не нужно все задачи распределены по одной и ответ $n \cdot n_1 + m \cdot m_1 + k \cdot k_1$.

Если же это все-таки так, то в распределении будет $(m + k + 1)$ групп задач типа n с $q = n//(m + k + 1)$ подряд идущими задачами и еще мы не распределили $n\%(m + k + 1)$ задач — добавим их.

То есть будет $n\%(m + k + 1)$ групп с $(q + 1)$ задачей, а остальные с q.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
N = list(map(int, input().split()))
T = list(map(int, input().split()))

time_min = N[0] * T[0] + N[1] * T[1] + N[2] * T[2]
Max = max(N)
Sum = sum(N)
l = Sum - Max + 1

if Max > l:
    q = Max // l
    time_min += l * q * (q - 1) // 2
    r = Max % l
    time_min += r * q

print(time_min)
```

Задача VI.1.1.2. Баллы за гонку (17 баллов)

Вы тренер автогонщиков, и сейчас один из ваших экипажей участвует в гонке автомобилей. Всего в гонке принимают участие N автомобилей, на старте все они выстроены в ряд друг за другом, то есть каждый автомобиль начинает гонку со своей заданной позиции.

Сейчас вы находитесь вдали от места события, но получаете лог сообщений от своего экипажа по специальному каналу. Каждое сообщение это или «+» или «-», которые обозначают, что экипаж обогнал один автомобиль, и, что экипаж был обогнан одним автомобилем, соответственно.

За каждое занятое на финише место экипаж получает определенное количество баллов, которое описывается массивом d, где d_i — количество баллов за место i. Получив весь лог сообщений, вы поняли, что не знаете с какой позиции начинал гонку ваш экипаж.

Определите математическое ожидание заработанных за гонку баллов, если ваш экипаж мог начинать с любой позиции, удовлетворяющей логу сообщений, равновероятно. Выведите его округленным в меньшую сторону до целого числа.

Математическое ожидание величины заработанных баллов:

$$score = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot d_i,$$

где p_i — вероятность занять на финише место i, d_i — количество баллов, присуждающееся за место i.

Формат входных данных

В первой строке содержится целое число N ($1 \leqslant N \leqslant 10^5$). Во второй строке содержится строка $|s| \leqslant 10^5$ — лог сообщений. В третьей строке содержится массив d ($0 \leqslant d_i \leqslant 10^9$) состоящий из N целых чисел.

Формат выходных данных

Выведите единственное целое число — ответ на задачу.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
5 +--+- 5 4 3 2 1

Стандартный вывод
2

Пример №2

Стандартный ввод
5 +--+- 5 4 3 2 1 6 ++++-+--+ 20 16 10 5 3 1

Стандартный вывод
13

Решение

Вначале оценим на каких местах мог начинать гонку экипаж: примем некоторый счетчик равный нулю, далее будем итерироваться по строке — логу сообщений, корректируя счетчик следующим образом:

1. Если встретили «+», то увеличиваем счетчик на 1.
2. Если встретили «-», то уменьшаем счётчик на 1.

В процессе нужно поддерживать минимальное значение счетчика и максимальное.

```
min_delta = 0
max_delta = 0
curr_delta = 0

for i in s:
    if i == "+":
        curr_delta += 1
    else:
        curr_delta -= 1

    min_delta = min(min_delta, curr_delta)
    max_delta = max(max_delta, curr_delta)
```

Таким образом мы знаем, что экипаж, начал гонку на каком-то неизвестном месте x, знаем, что в процессе гонки он вырывался максимум на max_delta мест вперед, относительно стартовой позиции и опускался максимум на $-min\_delta$ (min_delta не положительная) мест.

Но самое высокое место, которое можно занять — это первое место, тогда $1 \leqslant x - max\_delta$, следовательно $1 + max\_delta \leqslant x$.

Аналогично, самое низкое место, которое можно занять — это место N, тогда $x - min\_delta \leqslant N$, следовательно $x \leqslant N + min\_delta$.

Получили, что $1 + max\_delta \leqslant x \leqslant N + min\_delta$, но по завершении гонки позиция сместилась на $curr\_delta$, тогда позиция экипажа на финише:

$$1 + max\_delta - curr\_delta \leqslant x\_finish \leqslant N + min\_delta - curr\_delta.$$

```
high = max_delta - curr_delta
low = n - 1 + min_delta - curr_delta
```

Далее участников может смутить понятие математического ожидания, но его краткое описание дается в условии задачи. Заметим, что в указанном промежутке любое место равновероятно, а значит нужно просто найти среднее число очков, которое можно заработать — это сумма промежутка, деленная на его длину и округленная вниз (т. к. этого требует условие).

```
result = 0

for i in range(high, low + 1):
    result += d[i]

print(result // (low - high + 1))
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
def solve():
    n = int(input())
    s = str(input())
    d = list(map(int, input().split()))

    min_delta = 0
    max_delta = 0
    curr_delta = 0

    for i in s:
        if i == "+":
            curr_delta += 1
        else:
            curr_delta -= 1

        min_delta = min(min_delta, curr_delta)
        max_delta = max(max_delta, curr_delta)

    result = 0
    high = max_delta - curr_delta
```

```
    low = n - 1 + min_delta - curr_delta

    for i in range(high, low + 1):
        result += d[i]

    print(result // (low - high + 1))

if __name__ == '__main__':
    solve()
```

Задача VI.1.1.3. Моя большая правильная дробь (21 баллов)

Математический гном любит правильные дроби и не любит неправильные дроби. Правильной он считает любую дробь, у которой числитель меньше знаменателя. Гномы есть гномы, они любят все-все и побольше. Поэтому Математический гном хочет получить как можно большую правильную дробь.

Гном скопил некоторое количество положительных целых чисел. Он хочет составить максимальную правильную дробь, где числитель и знаменатель — суммы данных чисел, каждое число суммируется либо в числитель, либо в знаменатель, и все числа нужно задействовать.

Формат входных данных

Первая строка входных данных содержит целое число n ($3 \leqslant n \leqslant 100$) — общее количество чисел. Следующие n строк содержат n целых положительных чисел, каждое из которых не больше 100.

Формат выходных данных

Выведите два целых числа — числитель и знаменатель максимальной правильной дроби, которую можно получить, используя все заданные числа.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
5 1 2 3 4 5

Стандартный вывод
7 8

Пример №2

Стандартный ввод
3 2 3 2

Стандартный вывод
3 4

Решение 1

Задача сводится к тому, чтобы найти для знаменателя подмножество чисел, с минимальной суммой, большей $n/2$, где n — сумма всех чисел.

Если есть число, большее $n/2$, то оно и будет знаменателем.

Иначе перебор. Например, рассматриваем очередное число и составляем с ним все возможные суммы (оно само, плюс прибавляем его ко всем предыдущим суммам). Числа можно упорядочить предварительно. В итоге нужна сумма, наиболее близкая к $n/2$.

В предыдущем примере возможны суммы (в порядке построения):

1

1 2 3

1 2 3 4 5 6 7

1 2 3 4 5 6 7 8 9 11 12

Наилучшая сумма 8, дробь 7/8.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
n = int(input())
L = set()
summa = 0

for i in range(n):
    x = int(input())
    summa += x
    M = set()
    for elem in L:
        M.add(elem + x)
    L = L.union(M)
    L.add(x)

den = summa

for elem in L:
    if 2 * elem > summa and elem < den:
        den = elem

print(summa - den, den)
```

Решение 2

Задача является вариацией классической задачи о «рюкзаке» — требуется рассмотреть все варианты, которые могут получится в числителе и выбрать максимальный строго меньший $n/2$.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
n = int(input())
x = [int(input()) for i in range(n)]

can_do = {0}
for i in range(n):
    upd = set()
    for j in can_do:
        if j + x[i] not in can_do:
            upd.add(j + x[i])
    for j in upd:
        can_do.add(j)

mx = 0
for j in can_do:
    if 2 * j < sum(x) and j > mx:
        mx = j

print(mx, sum(x) - mx)
```

Задача VI.1.1.4. Мегаснежинки — еще не снег (22 баллов)

Зимой, когда влажно, снег идет хлопьями. Это происходит потому, что снежинки попарно притягиваются друг к другу, то есть, оказываются связанными друг с другом. В результате могут образоваться мегаснежинки.

Мегаснежинка — это группа снежинок, которая содержит не менее p снежинок, и где между любыми двумя снежинками можно выстроить цепь из снежинок. В этой цепи любые две соседние снежинки должны быть связаны.

Снежные эльфы очень любят порядок. Они уже пересчитали все снежинки, но с мегаснежинками пока не справились. Они знают, сколько всего у них снежинок, и знают, какие пары снежинок связаны друг с другом. Помогите им посчитать количество мегаснежинок.

Формат входных данных

Первая строка входных данных содержит целое число n ($3 \leqslant n \leqslant 100$) — количество снежинок. Вторая строка содержит целое число p ($2 \leqslant p \leqslant 100$) — минимальное количество снежинок в мегаснежинке. Третья строка содержит целое число m ($1 \leqslant m \leqslant n(n-1)/2$) — количество связей между парами снежинок. Следующие m строк содержат пары различных целых чисел k_1, k_2 ($1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$) — номера снежинок, связанных друг с другом. Все пары различны.

Формат выходных данных

Выведите единственное целое число — количество мегаснежинок.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
8 2 7 1 2 3 5 2 4 4 6 1 6 1 7 2 7

Стандартный вывод
2

Решение

Задача сводится к поиску компонент связности графа, содержащих не менее p вершин. Решить ее можно, например, с помощью алгоритма Уоршалла.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
n = int(input())
p = int(input())
m = int(input())
G = [[0] * n for i in range(n)]

for i in range(m):
   k1,k2 = map(int,input().split())
   G[k1-1][k2-1] = G[k2-1][k1-1] = 1

for i in range(n):
   G[i][i] = 1

for l in range(n):
   for i in range(n):
       if G[i][l]:
           for j in range(n):
               G[i][j] = max(G[i][j],G[l][j])
number = 0
A = set()

for i in range(n):
   s = ''.join(map(str,G[i]))
```

```
    A.add(s)

for elem in A:
    if elem.count('1') >= p:
        number += 1

print(number)
```

Также возможно решение с использованием обхода в ширину, оно представлено ниже.

```
def solve():
    def bfs(start):
        q = [start]
        q_it = 0
        used[start] = True
        size = 1

        while q_it < len(q):
            f = q[q_it]
            q_it += 1

            for u in g[f]:
                if used[u] == False:
                    used[u] = True
                    size += 1
                    q.append(u)

        return size

    n = int(input())
    p = int(input())
    m = int(input())

    g = [[] for i in range(n)]
    for i in range(m):
        a, b = map(int, input().split())
        a, b = a - 1, b - 1
        g[a].append(b)
        g[b].append(a)

    used = [False for i in range(n)]
    res = 0

    for i in range(n):
        if used[i] == False:
            size = bfs(i)
            if size >= p:
                res += 1

    print(res)

    return

if __name__ == '__main__':
    solve()
```

Задача VI.1.1.5. Полет за снимком (24 баллов)

Во тьме космоса находится спутник, управляемый удаленно с Земли, ему поручено переместиться в указанную точку, остановиться и сделать снимок ближайшего пространства. В рамках задачи примем, что область пространства, в которой находится спутник и место для съемки, неподвижна и пуста (отсутствуют любые объекты кроме спутника).

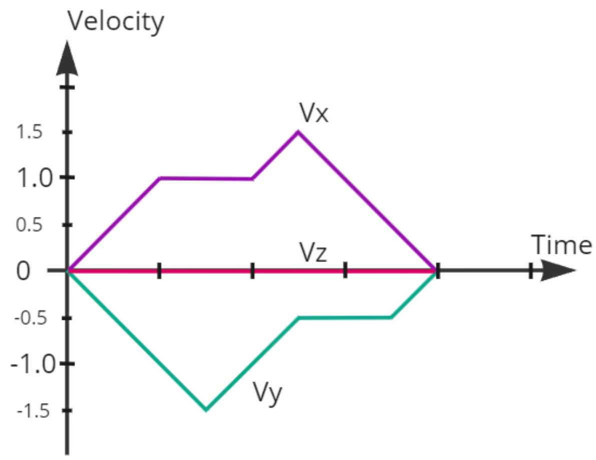
Такое представление позволяет ввести трехмерную систему координат, начало которой разместим в точке, где сейчас находится спутник, требуется переместиться в точку с координатами x, y, z. В этой задаче размерность не имеет значения.

У спутника есть двигатели, которые расходуют 1 ед. топлива для изменения любой компоненты скорости, параллельной одной из осей, на 1 в единицу времени.

Все двигатели расположены по всем трем осям спутника и позволяют изменять скорость по каждому направлению независимо и одновременно. Двигатели не создают вращательного момента, также опустим изменение массы спутника, из-за затрат топлива, т. е. скорость по какому-либо направлению всегда изменяется на 1 в единицу времени за 1 ед. топлива.

Рассмотрим пример:

1. Спутник провел в движении 4 единицы времени. В моменты времени $t = 0$ и $t = 4$ спутник неподвижен. Начальное положение спутника $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
2. Скорость спутника по оси X менялась так: спутник ускорялся одну ед. времени и достиг скорости $v_x = 1$, затратив 1 ед. топлива, с этой скоростью он пролетел еще 1 ед. времени по инерции, не затрачивая топлива. Далее спутник увеличил скорость до $v_x = 1,5$, затратив 0,5 ед. времени и топлива, после чего на протяжении 1,5 ед. времени спутник изменял скорость v_x до нуля, затратив 1,5 ед топлива. Итого спутник переместился по оси X на координату $x = 3,25$, затратив 3 ед. топлива.
3. Изменение скорости по оси Y представлено на графике ниже. Спутник переместился по оси Y на координату $y = -2,75$, затратив 3 ед. топлива.
4. Скорость спутника по оси Z не изменялась.
5. Итого спутник переместился на координаты $(x, y, z) = (3,25, -2,75, 0)$, затратив 6 ед. топлива за 4 ед. времени.



Определите минимальное количество топлива, которое требуется затратить для перемещения спутника в заданную точку пространства в минимально возможное время. Обратите внимание, что спутник должен остановиться в заданной точке.

Формат входных данных

В единственной строке входных данных содержится три целых числа x, y, z ($-10^9 \leqslant x, y, z \leqslant 10^9$).

Формат выходных данных

Выведите единственное число — ответ на задачу с точностью до 10^{-2}.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`2 4 6`

Стандартный вывод
`7.868511299267`

Пример №2

Стандартный ввод
`-4 5 0`

Стандартный вывод
`6.944271830603`

Решение

У автора не возникает сомнений, что участник знает формулу равномерного ускорения $S = (at^2)/2$ без начальной скорости и некоторые смежные знания из области школьной физики.

В заданной постановке вопроса в первую очередь требуется минимизировать время полета. Заметим, что если мы хотим добраться до какой-то точки (в одномерном случае) максимально быстро (и остановиться в ней), то нам требуется безостановочно ускоряться до середины пути, а потом так же безостановочно тормозить — время на разгон = времени на остановку.

Нетрудно заметить, что минимальное время t_{min} не может быть меньше времени, требующегося для осуществления описанной выше стратегии для направления с максимальной по модулю координатой. Таким образом мы минимизировали время.

Возьмем координаты, на которые нам надо сместиться , по модулю и отсортируем $C \leqslant B \leqslant A$.

Минимизация израсходованного топлива будет осуществляться для направлений B и C, минимизировать топливо для A не получится, т. к. мы должны как можно быстрее добраться по координате A, а для этого есть один вариант (см. выше).

Утверждение:

В случае, когда спутник переместился с изначально неподвижного положения до какой-то точки и остановился в ней, причем перемещение было однонаправленным (без разворотов), то выполняется следующее: *чем больше затрачено время на перемещение, тем меньше топлива израсходовано.*

До этого можно дойти своими соображениями, но помогает это: если тормозить — то безостановочно, если разгонятся — то тоже безостановочно, т. к. это по полной минимизирует время, тем не менее затраченное топливо зависит только от набранной/сниженной величины скорости, т. е. наиболее выгодно для нас.

Таким образом, для координат B, C требуется найти максимальною скорость до которой нужно разогнаться, чтобы пройти на ней некоторый путь, после чего безостановочно тормозить и добраться в точности в минимальное время t_{min} — это можно сделать решив квадратное уравнение, или, написав бинарный поиск, как это было реализовано в авторском решении.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
import math

def solve():
    import math

    def Abs(x):
        return abs(float(x))

    position = list(map(Abs, input().split()))
    minimum_time = math.sqrt(max(position))
    result = 0

    for component in position:
        if component == 0:
            continue

        minimum_velocity = 0
        maximum_velocity = math.sqrt(component)

        for step in range(1000):
            middle = (minimum_velocity + maximum_velocity) / 2
            time_spend = 2 * middle + (component - middle ** 2) / middle

            if time_spend > 2 * minimum_time:
                minimum_velocity = middle
            else:
                maximum_velocity = middle

        result += 2 * middle

    print("%.12f" % result)

if __name__ == '__main__':
    solve()
```

Тестовые наборы для задач представленны по ссылке — https://disk.yandex.ru/d/kyZy9U3jM8bIrA.

Физика. 8–9 классы

Задача VI.1.2.1. Пружинный маятник (15 баллов)

Темы: механические колебания, период колебаний.

К пружине подвешен грузик, первоначальная масса которого неизвестна. При увеличении массы грузика на 0,9 кг, период колебаний возрастает в 2 раза. Определить первоначальную массу грузика.

Решение

Дано:
$\Delta m = 0,9$ кг
$T_2 = 2T_1$
$m_2 = m_1 + \Delta m$

m_1 — ?

Запишем уравнения для периода пружинного маятника для двух случаев:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}};\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + \Delta m}{k}}.$$

Так как по условию $T_2 = 2T_1$, то получим

$$m_1 + \Delta m = 4m_1;\ m_1 = \frac{\Delta m}{3} = \frac{0,9}{3} = 0,3\,\text{кг}.$$

Ответ: $m_1 = 0,3$ кг.

Критерии оценивания

1. Правильно записаны формулы для периода пружинного маятника в двух случаях — 4 балла.
2. Проведены математические преобразования, получена конечная формула, подставлены числовые данные, получен верный результат — 6 баллов.
3. Приведены верные пояснения — 5 баллов.

Задача VI.1.2.2. Плот (15 баллов)

Темы: сила Архимеда, плавание тел, плотность вещества.

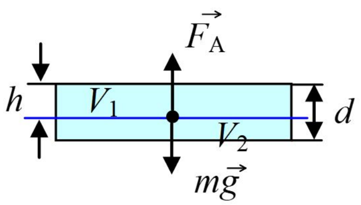
Ребята построили дубовый плот и спустили его в озеро. Высота плота над уровнем воды в озере 0,1 м. Принять плотность воды 1030 кг/м^3, плотность дуба 720 кг/м^3. Какова толщина всего плота? (Ответ округлить до сотых)

Решение

Дано:
$h = 0,1$ м
$\rho_д = 720$ кг/м^3
$\rho_в = 1030$ кг/м^3

d — ?

Сделаем рисунок. Укажем силы, действующие на плот.



Условие плавания тел: $F_{\text{А}} = m_{\text{л}} g$.

$$\rho_{\text{в}} g V_2 = \rho_{\text{д}} g (V_1 + V_2)$$

$$\rho_{\text{в}}(d-h)s = \rho_{\text{д}} ds$$

$$\rho_{\text{в}}(d-h) = \rho_{\text{д}} d$$

$$\rho_{\text{в}} d - \rho_{\text{в}} h = \rho_{\text{д}} d$$

$$d(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}) = \rho_{\text{в}} h$$

$$d = \frac{\rho_{\text{в}} h}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}} = \frac{1030 \cdot 0,1}{1030 - 720} = 0,33\ \text{м}$$

Ответ: 0,33 м.

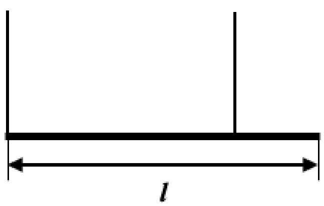
Критерии оценивания

1. Выполнен поясняющий рисунок с указанием действующих сил и обозначений — 2 балла.
2. Правильно записано условие плавания тел. — 2 балла.
3. Правильно расписана сила Архимеда, масса тела и объем погруженной части тела — 3 балла.
4. Проведены математические преобразования, получена конечная формула, подставлены числовые данные, получен верный результат — 4 балла.
5. Указаны названия применяемых законов, имеются пояснения к решению — 4 балла.

Задача VI.1.2.3. Балка на тросах (25 баллов)

Темы: момент силы, условия равновесия твердого тела.

Подъемный кран поднимает балку, точки крепления тросов к балке показаны на рисунке. Балка имеет следующие характеристики: длину 13 метров, массу 1 тонна. Один трос прикреплен к концу балки, а второй — на расстоянии 3 метра от другого конца. Найти силу натяжения тросов, если ускорение свободного падения 10 м/с^2.

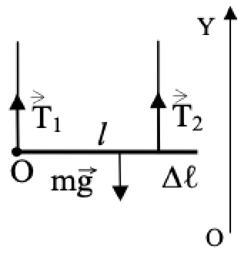


Решение

Дано:
$m = 1000$ кг
$l = 13$ м
$\Delta l = 3$ м
T_1 — ?
T_2 — ?

Условие равновесия для моментов всех сил относительно т. O с учетом знаков:

$$mg\frac{l}{2} - T_2(l - \Delta l) = 0.$$



Выразим

$$T_2 = \frac{mgl}{2(l - \Delta l)} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 13}{2(13 - 3)} = 6500\,\text{Н}.$$

Условие равновесия для всех внешних сил $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = 0$ в том числе и в проекциях на выбранную ось OY: $T_1 + T_2 - mg = 0$.

Выразим из уравнения:

$$T_1 = mg - T_2 = 10000 - 6500 = 3500\,\text{Н}.$$

Ответ: $T_1 = 3500$ Н; $T_2 = 6500$ Н.

Задача VI.1.2.4. Опыт с линзой (25 баллов)

Темы: линзы, фокусное расстояние, изображение предмета.

Ученик проводил опыты с собирающей линзой, фокусное расстояние которой 12 см. В ходе опыта было получено, что данная линза дает трехкратное увеличение предмета. Во второй части опыта, ученик подвинул экран к линзе на 10 см и передвигая предмет сделал изображение на экране четким. Необходимо рассчитать на сколько см был перемещен предмет относительно первоначального положения. (Ответ округлить до десятых)

Решение

Дано:
$F = 12$ см
$\Gamma = 3$
$x = 10$ см

Δd — ?

Формула тонкой собирающей линзы для 1 части опыта:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \qquad \text{(VI.1.1)}$$

Формула для увеличения линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d}. \qquad \text{(VI.1.2)}$$

Преобразуем формулу (VI.1.1):

$$F = \frac{f \cdot d}{f + d},$$

подставим в нее из формулы (VI.1.2) выражение $f = \Gamma \cdot d$.

В результате совместного решения получим:

$$d = \frac{F(1+\Gamma)}{\Gamma} = \frac{12 \cdot 4}{3} = 16\,\text{см и } f = 3 \cdot 16 = 48\,\text{см}.$$

Формула тонкой линзы для нового положения предмета и изображения:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} \tag{VI.1.3}$$

$$\text{где } f_1 = f - x = 48 - 10 = 38\,\text{см} \tag{VI.1.4}$$

Из уравнений (VI.1.3) и (VI.1.4) получим:

$$d_1 = \frac{F \cdot f_1}{f_1 - F} = \frac{12 \cdot 38}{38 - 12} = 17,5\,\text{см}.$$

Тогда перемещение предмета в результате опытов:

$$\Delta d = d_1 - d = 17,5 - 16 = 1,5\,\text{см}.$$

Ответ: 1,5 см.

Критерии оценивания

1. Правильно записана формула тонкой собирающей линзы для 1 части опыта — 2 балла.
2. Правильно записана формула для увеличения линзы — 2 балла.
3. Получена конечная формула, подставлены числовые данные, получен верный результат для d и f — 5 баллов.
4. Правильно записана формула тонкой собирающей линзы после того, как экран и предмет передвинули — 3 балла.
5. Получена конечная формула, подставлены числовые данные, получен верный результат для d_1 и f_1 — 5 баллов.
6. Правильно определено искомое перемещение предмета — 4 балла.
7. Указаны названия применяемых законов, имеются пояснения к решению — 4 балла.

Задача VI.1.2.5. Тепловой баланс (20 баллов)

Темы: теплоемкость, количество теплоты, температура.

Имеем три тела A, B и C одинаковой массы и с одинаковой теплоемкостью. Если в теплоизолированный сосуд поместить тела A и B, то установится температура T_1. Если в теплоизолированный сосуд поместить тела A и C, то установится температура T_2. Если в теплоизолированный сосуд поместить тела B и C, то установится температура T_3. Определить какая установится температура, если в сосуд поместить тела A, B и C одновременно? Все три случая взяты при начальных температурах тел.

Решение

Пусть начальные температуры тел: T_{01}, T_{02} и T_{03}.

Уравнения теплового баланса для трех указанных случаев:

$$C(T_{01} - T_1) + C(T_{02} - T_1) = 0,$$

$$C(T_{01} - T_2) + C(T_{03} - T_2) = 0,$$

$$C(T_{02} - T_3) + C(T_{03} - T_3) = 0,$$

$C = cm$ — теплоемкость любого тела, где c и m — удельная теплоемкость и масса любого из тел.

Складывая три уравнения, получим соотношение:

$$T_{01} + T_{02} + T_{03} = T_1 + T_2 + T_3.$$

Уравнение теплового баланса для случая, когда в тепловой контакт приводят все три тела:

$$C(T_{01} - T) + C(T_{02} - T) + C(T_{03} - T) = 0,$$

где T — искомая установившаяся температура.

Из этого уравнения находим, что

$$T = (T_{01} + T_{02} + T_{03})/3 = (T_1 + T_2 + T_3)/3.$$

Ответ: $T = (T_1 + T_2 + T_3)/3$.

Критерии оценивания

1. Правильно записаны уравнения теплового баланса для трех указанных случаев — 6 баллов.
2. Правильно записано уравнение теплового баланса для случая, когда в тепловой контакт приводят все три тела (в общем виде) — 4 балла.
3. Проведены математические преобразования, получена правильная конечная формула для искомого значения температуры — 6 баллов.
4. Указаны названия применяемых законов, имеются пояснения к решению — 4 балла.

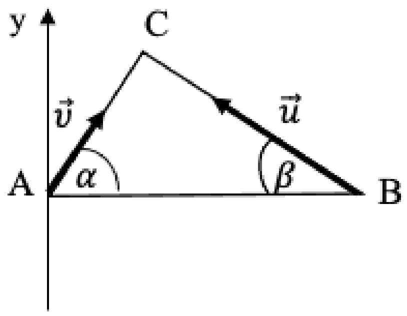
Физика. 10–11 классы

Задача VI.1.3.1. Угол не столкновения (10 баллов)

Темы: равномерное движение, путь, скорость.

Автомобиль № 1 движется из пункта A со скоростью ν, составляющей угол α с горизонтом. Под каким углом β к горизонту **недопустимо** двигаться автомобилю № 2 из пункта B, иначе произойдет столкновение? Скорость автомобиля, который намерен двигаться из точки B равна u.

Решение



Путь автомобиля № 1 до встречи с автомобилем № 2 $AC = \nu t$. Путь автомобиля № 2 до встречи с автомобилем № 1 $CB = ut$.

Согласно теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha} \text{ или } \frac{\nu t}{\sin\beta} = \frac{ut}{\sin\alpha}.$$

Отсюда

$$\nu \cdot \sin\alpha = u \cdot \sin\beta.$$

$$\beta - \arcsin\left(\frac{\nu}{u}\sin\alpha\right).$$

Ответ: $\beta - \arcsin\left(\dfrac{\nu}{u}\sin\alpha\right)$.

Критерии оценивания

1. Правильно записаны формулы для пройденного пути для каждого автомобиля — 2 балла.
2. Проведены математические и тригонометрические преобразования, получена формула для угла — 6 баллов.
3. Имеются пояснения к решению — 2 балла.

Задача VI.1.3.2. Эх, прокачусь! (20 баллов)

Темы: равноускоренное движение, сила трения.

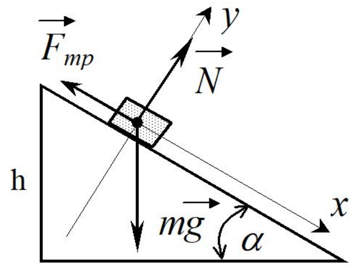
Санки скатываются с вершины снежной горы высотой 10 метров под углом 45°к горизонту. Коэффициент трения полозьев санок о снег равен 0,02. Определить скорость санок у основания горы, если ускорение свободного падения 10 м/с^2. (Ответ округлить до целого)

Решение

Дано:
$h = 10$ м
$\alpha = 45^\circ$
$\mu = 0,02$

$\nu - ?$

Сделаем рисунок и запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y.



$$mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma. \tag{VI.1.5}$$

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Так как $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, получим

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha.$$

Ускорение распишем как

$$a = \frac{\nu^2 - \nu_0^2}{2(x - x_0)},$$

где $\nu_0 = 0$, $x_0 = 0$.

Выразим из рисунка: $x = \frac{h}{\sin\alpha}$.

Подставим эти величины в уравнение (VI.1.5) и получим

$$\frac{\nu^2\sin\alpha}{2h} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Выразим скорость:

$$\nu = \sqrt{2gh(1 - \mu ctg\alpha)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 10\cdot\left(1 - 0,02\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 14\ \text{м/с}.$$

Ответ: 14 м/с.

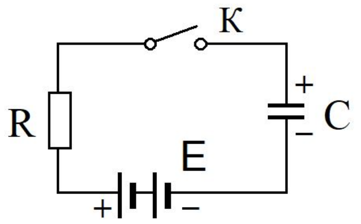
Критерии оценивания

1. Сделан рисунок и правильно указаны все действующие силы, указаны оси — 4 балла.
2. Записан второй закон Ньютона в векторном виде и/или в проекциях на выбранные оси — 4 балла.
3. Верно записана формула для ускорения или получена из кинематических уравнений — 2 балла.
4. Записано тригонометрическое выражение для связи пройденного пути от высоты горы — 1 балл.
5. Проведены математические преобразования, получена конечная формула, подставлены числовые данные, получен верный результат — 5 баллов.
6. Указаны названия применяемых законов, имеются пояснения к решению — 4 балла.

Задача VI.1.3.3. Зарядка конденсатора (20 баллов)

Темы: работа электрического поля, электрическая цепь, конденсатор.

На рисунке представлена схема. Конденсатор емкостью 10 мкФ предварительно был заряжен до разности потенциалов 200 В. ЭДС батареи 400 В, внутренним сопротивлением источника тока пренебречь. Определить количество теплоты, которое выделится в резисторе после замыкания ключа за время полной зарядки конденсатора.



Решение

Дано:
$C = 10^{-5}$ Ф
$U = 200$ В
$\mathcal{E} = 400$ В
$Q - ?$

Заряд на пластинах конденсатора при разомкнутом ключе K:

$$q_0 = CU.$$

Заряд на пластинах конденсатора после замыкания ключа K, в момент полной зарядки конденсатора:

$$q = CE.$$

Работа, которую совершает источник при зарядке конденсатора:

$$A = \mathcal{E}(q - q_0).$$

Запишем уравнение баланса энергии для системы:

$$\mathcal{E}(q - q_0) = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{CU^2}{2} + Q.$$

Подставим в уравнение выражения для зарядов и выразим

$$Q = \mathcal{E}C(\mathcal{E} - U) - \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{C(\mathcal{E} - U)^2}{2}.$$

$$Q = \frac{10^{-5}(400 - 200)^2}{2} = 0,2 \text{ Дж}.$$

Ответ: 0,2 Дж.

Критерии оценивания

1. Определен заряд на пластинах конденсатора до и после замыкания ключа — 4 балла.
2. Верно записана формула для работы, которую совершает источник при зарядке конденсатора — 4 балла.
3. Записано уравнение баланса энергии для системы — 4 балла.
4. Проведены математические преобразования, получена конечная формула, подставлены числовые данные, получен верный результат — 4 балла.
5. Имеются пояснения к решению — 4 балла.

Задача VI.1.3.4. Циклотрон (20 баллов)

Темы: индукция магнитного поля, сила Лоренца.

Из циклотрона вылетает дейтрон (ядро изотопа водорода), ускоренный магнитным полем с индукцией равной 1 Тл. Максимальный радиус кривизны его траектории равен 0,5 м. Определите кинетическую энергию дейтрона в конце ускорения, если его масса равна $3,34 \cdot 10^{-27}$ кг, а заряд равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. (Ответ представить в 10^{-14} Дж и округлить до целого, а также перевести в МэВ и округлить до целого)

Решение

Дано:
$R = 0,5$ м
$B = 1$ Тл
$m = 3,34 \cdot 10^{-27}$ кг
$q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$E_к$ — ?

Кинетическая энергия частицы

$$E_к = \frac{m\nu^2}{2} \tag{VI.1.6}$$

Если заряженная частица движется в магнитном поле, то на нее действует сила Лоренца.

Опишем движение частицы по окружности при помощи второго закона Ньютона:

$$q\nu B = \frac{m\nu^2}{R} \tag{VI.1.7}$$

Выразим из уравнения (VI.1.7) скорость частицы $\nu = \dfrac{qBR}{m}$, подставим в уравнение (VI.1.6) и получим: $E_к = \dfrac{(qBR)^2}{2m}$.

Из формулы видно, что кинетическая энергия будет увеличиваться в зависимости от радиуса кривизны траектории частицы и магнитного поля в циклотроне.

Значит в нашем случае максимальная кинетическая энергия будет при максимальном радиусе кривизны частицы.

Определим ее:

$$E_к = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 0,5)^2}{2 \cdot 3,34 \cdot 10^{-27}} = 96 \cdot 10^{-14}\ \text{Дж} \approx 6\ \text{МэВ}.$$

Ответ: $E_к = 96 \cdot 10^{-14}$ Дж, $E_к = 6$ МэВ.

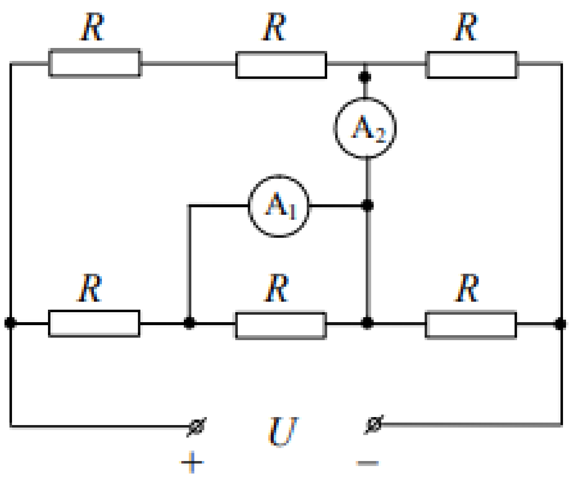
Критерии оценивания

1. Правильно записана формула для кинетической энергии частицы — 2 балла.
2. Правильно записан второй закон Ньютона при движении частицы по окружности — 4 балла.
3. Проведены математические преобразования, получена формула для кинетической энергии — 4 балла.
4. Проведен анализ полученной формулы, сделаны верные выводы — 4 балла.
5. Подставлены числовые данные, получен верный результат в Дж — 4 балла.
6. Записан верный ответ в МэВ — 2 балла.

Задача VI.1.3.5. Электрическая цепь (30 баллов)

Темы: электрическая цепь, сила тока, сопротивление проводников.

На рисунке изображена электрическая цепь. Определить показания идеальных амперметров, если напряжение на источнике 210 В, а все резисторы одинаковые и имеют сопротивление 6 кОм.

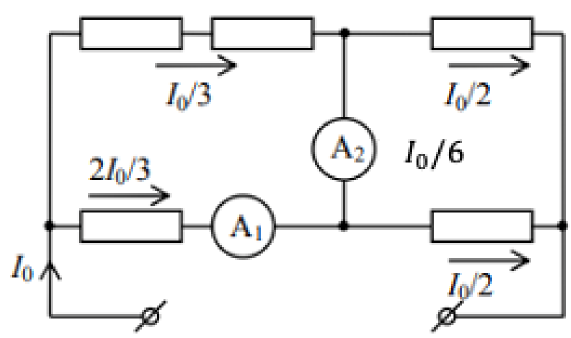


Решение

Дано:
$R = 6 \cdot 10^3$ Ом
$U = 210$ В

I_1 — ?
I_2 — ?

Если амперметры идеальные, то их внутренним сопротивлением можно пренебречь и схему можно представить в другом виде.



Из шести резисторов, на схеме осталось пять, так как через средний в нижнем ряду резистор ток не идет, а идет через амперметр A_1.

Обозначим силу тока в не разветвленной цепи за I_0, тогда токи, текущие через резисторы изображены на рисунке. Эти токи нашли согласно закону Ома:

$$U = IR.$$

Можно воспользоваться и/или правилами Кирхгоффа.

По закону Ома для полной цепи найдем силу тока

$$I_0 = \frac{U}{\frac{2R}{3} + \frac{R}{2}} = \frac{6U}{7R} = \frac{6 \cdot 210}{7 \cdot 6 \cdot 10^3} = 30 \text{ мА}.$$

Как видно из рисунка, ток, текущий через амперметр A_1 такой же, как и через левое сопротивление, следовательно

$$I_1 = \frac{2I_0}{3} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{3} = 20 \text{ мА}.$$

Ток через амперметр A_2 определим по правилу Кирхгоффа для узла:

$$I_2 + \frac{I_0}{3} = \frac{I_0}{2}.$$

Получим:

$$I_2 = \frac{I_0}{2} - \frac{I_0}{3} = \frac{I_0}{6} = \frac{30}{6} = 5 \text{ мА}.$$

Ответ: $I_1 = 20$ мА, $I_2 = 5$ мА.

Критерии оценивания

1. Правильно определено, что у идеальных амперметров сопротивлением можно пренебречь — 4 балла.
2. Приведена схема с указанием направлений токов или правильным соединением сопротивлений в результате того, что сопротивлением амперметров пренебрегли — 6 баллов.
3. Правильно применен закон Ома для участка цепи и / или для полной цепи — 4 балла.
4. Правильно определены токи, текущие через сопротивления — 6 баллов.
5. Проведены математические преобразования, подставлены числовые данные, получен верный результат — 6 баллов.
6. Указаны названия применяемых законов, имеются пояснения к решению — 4 балла.