

# Информационная безопасность

2022/23 учебный год

## Заключительный этап

### Предметный тур

#### Информатика. 8–11 класс

##### *Задача VI.1.1.1. Игра на любителя (20 баллов)*

Имя входного файла: стандартный ввод.

Имя выходного файла: стандартный вывод.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 секунда.

Ограничение по памяти: 256 мегабайт.

##### *Условие*

Вася любит играть с числами. Вот и в этот раз Вася придумал следующую игру:

Для начала Вася выбирает целевое число  $x$ .

Игра начинается с числа  $s = 0$ . На каждом шаге Вася может выполнить одну из двух операций:

1. Прибавить 1 к числу  $s$ .
2. Умножить число  $s$  на 2.

Игра заканчивается, когда Вася получает  $s = x$ .

У Васи есть любимое число  $p$ . Теперь Вася решил поиграть с этим числом в свою новую игру. Но есть проблема — у Васи осталась только запись числа  $p$  в системе счисления  $b = 2^k$ .

Помогите Васе найти **минимальное количество** вышеописанных операций, выполнив которые, он сможет получить число  $p$  из числа  $s = 0$ .

##### *Формат входных данных*

В первой строке содержатся два целых числа  $n$  и  $k$  ( $1 \leq n \leq 10^5$ ,  $1 \leq k \leq 4$ ) — количество цифр в числе  $p$  и показатель степени в системе счисления  $b = 2^k$ .

Во второй строке задаётся строка, состоящая из  $n$  символов  $P_1, P_2, \dots, P_n$  — запись числа  $p$  в системе счисления  $b$ . Гарантируется, что  $P_i$  является корректной цифрой в записи системы счисления  $b$ .

##### *Формат выходных данных*

Выведите целое число — **минимальное количество** операций, чтобы получить число  $p$  из числа  $s = 0$ .

## Критерии оценивания

Группа	Баллы	Дополнительные ограничения	Необходимые группы
0	-	Тесты из условия	-
1	5	$1 \leq n \leq 10, k = 1$	0
2	15	$1 \leq n \leq 60, k = 1$	1
3	20	$k = 1$	2
4	20	$k = 2$	0
5	20	$k = 3$	0
6	20	$k = 4$	0

## Примеры

### Пример №1

<b>Стандартный ввод</b>
5 1 10011
<b>Стандартный вывод</b>
7

### Пример №2

<b>Стандартный ввод</b>
2 4 C9
<b>Стандартный вывод</b>
11

## Пояснения к примеру

Пояснение к **первому** примеру:

- Любимое число Васи  $p = 10011_2 = 19_{10}$ .
- Последовательность из примера задаёт следующие преобразования:  
 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ .
- Итого — 7 операций.

Пояснение ко **второму** примеру:

- Любимое число Васи  $p = C9_{16} = 201_{10}$ .
- Последовательность из примера задаёт следующие преобразования:  
 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 25 \rightarrow 50 \rightarrow 100 \rightarrow 200 \rightarrow 201$ .
- Итого — 11 операций.

Отметим, что установлено следующее соответствие чисел 10-й системы счисления и цифр 16-й:

- $10_{10} = A_{16}$ .
- $11_{10} = B_{16}$ .
- $12_{10} = C_{16}$ .
- $13_{10} = D_{16}$ .
- $14_{10} = E_{16}$ .
- $15_{10} = F_{16}$ .

## Задача VI.1.1.2. Оптимизация числа (40 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод.

Имя выходного файла: стандартный вывод.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 секунда.

Ограничение по памяти: 256 мегабайт.

### Условие

Дано целое число  $x$ . К нему можно применять следующую операцию неограниченное количество раз:

- Поменять любые две **соседние** цифры  $a$  и  $b$  за  $|a - b|$  секунд.

За какое наименьшее время удастся сделать число  $x$  максимальным?

### Формат входных данных

В первой строке расположено единственное натуральное число  $x$  ( $1 \leq x \leq 10^{300\,000} - 1$ ) — число, описанное в условии.

### Формат выходных данных

Выведите единственное целое неотрицательное число  $t$  — минимальное количество секунд, которого хватит, чтобы посредством вышеупомянутой операции сделать число  $x$  максимальным.

### Критерии оценивания

Группа	Баллы	Доп. ограничения	Необходимые группы
0	-	Тесты из условия	-
1	10	$1 \leq x \leq 10^3 - 1$	0
2	20	$10^3 \leq x \leq 10^9 - 1$	1
3	30	$10^9 \leq x \leq 10^{5000} - 1$	2
4	40	Без доп. ограничений	3

### Примеры

#### Пример №1

Стандартный ввод
1459
Стандартный вывод
25

### Пояснения к примеру

Приведём возможную последовательность обменов для числа из первого примера.

1. Совершим преобразование  $1459 \Leftrightarrow 4159$  за  $|1 - 4| = 3$  секунды.
2. Совершим преобразование  $4159 \Leftrightarrow 4519$  за  $|1 - 5| = 4$  секунды.

3. Совершим преобразование  $4519 \Leftrightarrow 4591$  за  $|1 - 9| = 8$  секунд.
4. Совершим преобразование  $4591 \Leftrightarrow 4951$  за  $|5 - 9| = 4$  секунды.
5. Совершим преобразование  $4951 \Leftrightarrow 9451$  за  $|4 - 9| = 5$  секунд.
6. Совершим преобразование  $9451 \Leftrightarrow 9541$  за  $|4 - 5| = 1$  секунду.

Итого,  $3 + 4 + 8 + 4 + 5 + 1 = 25$  секунд.

Можно показать, что максимизировать число 1459 быстрее не выйдет.

### **Задача VI.1.1.3. Олимпиада по информационной безопасности (30 баллов)**

**Имя входного файла:** стандартный ввод.

**Имя выходного файла:** стандартный вывод.

**Ограничение по времени выполнения программы:** 2 секунды.

**Ограничение по памяти:** 256 мегабайт.

#### **Условие**

В олимпиаде по информационной безопасности участвуют  $n$  команд. Команды были рассажены за **круглый стол** так, что команда с номером  $t + 1$  сидит рядом с командой  $t$ , а команда 1 сидит рядом с командой  $n$ .

Для проведения было подготовлено  $n$  компьютеров — по одному на команду. Про компьютер с номером  $i$  известна его производительность  $a_i$ .

Организаторы могут как угодно распределить компьютеры между командами и заключили, что эффективнее всего будет максимизировать величину  $S$  — сумму абсолютных разниц в производительности компьютеров **соседних** команд.

Формально,  $S = \left( \sum_{t=1}^{n-1} |a_{p_t} - a_{p_{t+1}}| \right) + |a_{p_1} - a_{p_n}|$ , где  $p$  — перестановка чисел от 1 до  $n$  такая, что команда  $t$  работает за компьютером  $p_t$ .

Во время тура на площадке случаются скачки напряжения. В результате одного скачка изменяется производительность **ровно одного** компьютера. Обратите внимание, что изменение производительности носит постоянный характер (до конца соревнования или до следующего скачка с заданным компьютером).

После каждого скачка организаторы хотят знать, какой максимальной величины  $S$  можно достичь, если заново распределить компьютеры между командами оптимальным образом.

#### **Формат входных данных**

В первой строке даны два целых числа  $n$  и  $q$  ( $3 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$ ,  $1 \leq q \leq 2 \cdot 10^5$ ) — количество команд и скачков напряжения соответственно.

В следующей строке перечислены  $n$  целых чисел массива  $a$  ( $1 \leq a_i \leq 10^9$ ) — начальные производительности компьютеров.

Следующие две строки описывают скачки напряжения.

В первой строке заданы  $q$  целых чисел ( $1 \leq index_i \leq n$ ), где  $index_i$  — номер компьютера, производительность которого изменилась после  $i$ -го скачка напряжения.

Во второй строке заданы  $q$  целых чисел ( $1 \leq efficiency_i \leq 10^9$ ), где  $efficiency_i$  — производительность установившаяся на компьютере с номером  $index_i$  после  $i$ -го скачка напряжения.

## Формат выходных данных

На отдельных строках выведите  $q$  целых неотрицательных чисел  $S_1, S_2, \dots, S_q$ , где  $S_j$  — максимальная сумма разниц в производительности компьютеров **соседних** команд, которую можно достичь после  $j$ -го скачка напряжения.

## Критерии оценивания

Группа	Баллы	Дополнительные ограничения	Необходимые группы
0	-	Тесты из условия	-
1	10	$3 \leq n \leq 10, q = 1$	0
2	10	$3 \leq n \leq 10^3, 1 \leq q \leq 10$	1
3	25	$1 \leq q \leq 10$	2
4	25	$1 \leq a_i \leq 100, 1 \leq x_j \leq 100$	0
5	30	Без дополнительных ограничений	3, 4

## Примеры

### Пример №1

Стандартный ввод
5 3 7 2 8 1 5 3 2 4 2 10 4
Стандартный вывод
18 28 22

### Пример №2

Стандартный ввод
6 2 1 2 3 4 5 6 1 5 10 1
Стандартный вывод
24 28

## Пояснения к примеру

Разберём первый пример.

1. Случился первый скачок напряжения:

- $a = [7, 2, 2, 1, 5]$ : компьютер  $i$  имеет производительность  $a_i$ .
- Пусть  $p = [1, 4, 5, 3, 2]$ : команда  $t$  пользуется компьютером  $p_t$ .
- Тогда  $S_1 = |7 - 1| + |5 - 1| + |5 - 2| + |2 - 2| + |7 - 2| = 18$ .

---

2. Случился второй скачок напряжения:

- $a = [7, 10, 2, 1, 5]$ .
- Пусть  $p = [2, 4, 1, 3, 5]$ .
- Тогда  $S_2 = |10 - 1| + |1 - 7| + |7 - 2| + |2 - 5| + |5 - 10| = 28$ .

3. Случился третий скачок напряжения:

- $a = [7, 10, 2, 4, 5]$ .
- Пусть  $p = [2, 3, 1, 4, 5]$ .
- Тогда  $S_3 = |10 - 2| + |2 - 7| + |7 - 4| + |4 - 5| + |5 - 10| = 22$ .

Можно показать, что более оптимальных вариантов распределить компьютеры между командами — выбрать другую перестановку  $p$  — после каждого из трёх скачков не существует.

### ***Задача VI.1.1.4. Трудности перевода (30 баллов)***

**Имя входного файла:** стандартный ввод.

**Имя выходного файла:** стандартный вывод.

**Ограничение по времени выполнения программы:** 1 секунда.

**Ограничение по памяти:** 256 мегабайт.

#### ***Условие***

Ваш друг Харрис часто меняет пароль от компьютера. Когда пароль необходимо сменить, Харрис выбирает строку  $s$  длины  $n$ , составленную из цифр от 0 до 9, а также систему счисления  $k$ . Затем Харрис выполняет следующую последовательность шагов, пока строка  $s$  не пуста.

- Выбирает число  $m$  ( $1 \leq m \leq |s|$ , где  $|s|$  — длина строки  $s$  на момент выполнения шага) такое, что десятичное число  $\overline{s_1 \dots s_m}$  записывается одной **положительной** цифрой  $k$ -й системы счисления. Обратите внимание, что на этом шаге строка  $s$  не может начинаться с символа 0.
- Дописывает эту цифру в начало создаваемого пароля.
- Стирает первые  $m$  символов строки  $s$ . Таким образом, длина и индексация строки меняются.

В очередной раз выбрав строку  $s$  и систему счисления  $k$ , Харрис задался вопросом: «а сколько всего различных паролей я могу получить, следуя намеченному плану?»

Харрису трудно переводить большие числа из одной системы счисления в другую. Помогите Харрису посчитать количество различных паролей, которые он может получить. Это число может быть очень большим, поэтому выведите его остаток от деления на  $10^9 + 7$ .

#### ***Формат входных данных***

В первой строке натуральное число  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^6$ ) — длина строки  $s$ .

Во второй строке натуральное число  $k$  ( $11 \leq k \leq 10^{200\,000} - 1$ ) — система счисления, описанная в условии.

В третьей строке входных данных даётся строка  $s$ . Гарантируется, что строка  $s$  составлена из цифр десятичной системы счисления —  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

---

### Формат выходных данных

Выведите единственное число — остаток от деления на  $10^9 + 7$  количества различных паролей, которые может получить Харрис.

### Критерии оценивания

Группа	Баллы	Доп. ограничения	Необходимые группы
0	-	Тесты из условия	-
1	10	$1 \leq n \leq 5, 11 \leq k \leq 99$	0
2	20	$1 \leq n \leq 18, 11 \leq k \leq 99$	1
3	20	$1 \leq n \leq 10^4, 11 \leq k \leq 10^{1000} - 1$	2
4	20	Каждый символ строки $s$ выбирается независимо и равновероятно	3
5	30	Без дополнительных ограничений	4

### Примеры

#### Пример №1

<b>Стандартный ввод</b>
5 35 12345
<b>Стандартный вывод</b>
5

#### Пример №2

<b>Стандартный ввод</b>
18 30 142929242127101712
<b>Стандартный вывод</b>
320

#### Пример №1

<b>Стандартный ввод</b>
5 36 10001
<b>Стандартный вывод</b>
0

---

## Пояснения к примеру

Пояснение к **первому** тестовому примеру.

В данном тесте Харрис разбивает строку 12345, а система счисления  $k = 35$ .

- Перечислим все допустимые способы составить пароль в первом примере. Пусть  $M$  — массив, в котором  $m_i$  равно количеству символов, из которых Харрис составит новую цифру на  $i$ -м шаге.
  1.  $M = [1, 1, 1, 1, 1]$  — пароль будет «5-4-3-2-1».
  2.  $M = [1, 1, 2, 1]$  — пароль будет «5-34-2-1».
  3.  $M = [1, 2, 1, 1]$  — пароль будет «5-4-23-1».
  4.  $M = [2, 1, 1, 1]$  — пароль будет «5-4-3-12».
  5.  $M = [2, 2, 1]$  — пароль будет «5-34-12».
- Приведем несколько примеров паролей, которые Харрис не мог составить:
  1.  $M = [2, 1, 2]$  — в таком случае число, взятое на последнем шаге, будет равно 45, что не является цифрой в системе счисления  $k$ ;
  2.  $M = [3, 1, 1]$  — в таком случае число, взятое на первом шаге, будет равно 123, что также не является цифрой в системе счисления  $k$ .

Пояснение ко **второму** тестовому примеру.

В данном примере Харрис выбрал строку  $s = \langle 142929242127101712 \rangle$  и  $k = 30$ .

Если на каждом шаге выбирать  $m = 2$ , то получится пароль «12-17-10-27-21-24-29-29-14».

Пояснение к **третьему** тестовому примеру.

Можно показать, что Харрис не может разбить данную строку ни одним корректным способом — в любом случае строка  $s$  будет начинаться с 0 в какой-либо момент разбиения.

## Задача VI.1.1.5. Ограбление по-берляндски (30 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод.

Имя выходного файла: стандартный вывод.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 секунда.

Ограничение по памяти: 256 мегабайт.

### Условие

Компьютеризированный банк Берляндии «Ко-Банк» прославился самой надёжной системой управления счетами. Разумеется, хакерская группировка «Атоматичес» времени зря не теряла и уже установила, что банковские счета управляются компьютерами с номерами  $1, \dots, N$ . Про компьютер с номером  $i$  известно:

- $t_i$  — время в секундах, требующееся для взлома компьютера;
- $c_i$  — количество бурлей на банковских счетах, к которым имеет доступ компьютер;
- $p_i$  — номер компьютера, который необходимо взломать, чтобы перейти ко взлому  $i$ -го.

Помимо этого «Атоматичес» нашли самое уязвимое место сети — компьютер с номером 1: взлом этого компьютера не требует получения доступа к любому другому компьютеру, поэтому во входных данных  $p_1 = 0$ .

У «Атоматичес» будет не более  $S$  секунд на взлом компьютеров — далее внутренние механизмы безопасности засекут проникновение и отключат доступ ко всей сети. Сервер устроен так, что в один момент времени «Атоматичес» могут взламывать **ровно один** компьютер.

Вам, как стажёру в отделе информационной безопасности «Ко-Банка», поручили определить максимально возможное количество бурлей, которые «Атоматичес» могут вывести со взломанных компьютеров (вывод средств производится мгновенно).

### Формат входных данных

В первой строке находятся два целых числа  $N, S$  ( $1 \leq N \leq 100, 1 \leq S \leq 10^5$ ) — количество компьютеров в сети и время на взлом, которым располагают «Атоматичес».

Затем следуют  $N$  строк с информацией о компьютерах. Строка  $i + 1$  содержит три целых числа  $t_i, c_i, p_i$  ( $1 \leq t_i \leq 10^3, 1 \leq c_i \leq 10^6, 1 \leq p_i < i$  для  $i \neq 1, p_1 = 0$ ) — время для взлома, количество бурлей на банковских счетах и номер компьютера, взлом которого необходим для взлома данного компьютера.

### Формат выходных данных

Выведите единственное число — максимально возможное количество украденных бурлей.

### Критерии оценивания

Группа	Баллы	Дополнительные ограничения	Необходимые группы
0	-	Тесты из условия	-
1	7	$p_i = \max(1, i - 2)$ для всех $i \geq 2$	-
2	10	$p_i = 1$ для всех $i \geq 2$	-
3	13	$p_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$	-
4	20	$1 \leq N \leq 20$	-
5	20	$t_i = 1$	-
6	30	Без дополнительных ограничений	0 – 5

### Примеры

#### Пример №1

Стандартный ввод
6 20
1 10 0
11 1 1
3 8 1
5 7 2
6 7 3
2 6 4
Стандартный вывод
26

---

Пример №2

Стандартный ввод
7 45
25 10 0
16 43 1
3 46 1
12 43 1
3 30 3
20 42 3
2 50 2

Стандартный вывод
129

*Пояснения к примеру*

В первом примере «*Atonamies*» выгоднее всего взломать компьютеры с номерами 1, 2, 3, 4.

Во втором примере «*Atonamies*» выгоднее всего взломать компьютеры с номерами 1, 3, 4, 5.

---

## Математика. 8–9 классы

### *Задача VI.1.2.1. (15 баллов)*

Чебурашка решил сделать подарок Гене и придумал новую шахматную фигуру, которую назвал «крокодил». «Крокодил» ходит на две клетки прямо и четыре в сторону. Может ли «крокодил» обойти всю шахматную доску, побывав в каждой клетке хотя бы один раз?

### *Задача VI.1.2.2. (20 баллов)*

На окружности отмечены одна белая и 9 синих точек. Сколько различных выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках можно построить, если одна из вершин обязательно белая?

### *Задача VI.1.2.3. (20 баллов)*

Вася сказал, что придумал трёхзначное простое число, все цифры которого различны и первая цифра равна произведению двух последних. А Юра считает, что таких чисел не существует. Кто из них прав?

### *Задача VI.1.2.4. (20 баллов)*

Из круга вырезали треугольник со сторонами 3, 5 и 6. Известно, что радиус этого круга наименьший из возможных. Найдите его.

### *Задача VI.1.2.5. (25 баллов)*

Решите уравнение  $\frac{x^4 - 1}{x - 1} = 5^y$  в целых числах.

## Математика. 10–11 классы

### *Задача VI.1.3.1. (20 баллов)*

Все четырехзначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, занумерованы в порядке возрастания. Какое число находится под номером 49?

### *Задача VI.1.3.2. (20 баллов)*

Существует ли натуральное число, которое в 1511 раза больше суммы его цифр?

---

**Задача VI.1.3.3. (20 баллов)**

$a$  и  $b$  — положительные числа. Сумма минимальных значений функций

$$f(x) = 2ax^2 + 2023x + 6b \text{ и } g(x) = 3bx^2 - 2023x + 4a$$

равна 0.

Чему равны эти минимальные значения?

**Задача VI.1.3.4. (20 баллов)**

В трапеции  $ABCD$  продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ . Окружность радиуса 6 проходит через точки  $A$  и  $D$  и пересекает луч  $AB$  в точке  $K$ . Найдите радиус описанной окружности вокруг треугольника  $KPD$ , если  $AD = 10$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = 5$ .

**Задача VI.1.3.5. (20 баллов)**

На всемирной конференции за круглым столом уселись 2023 человек — разведчики, которые всегда говорят правду, и шпионы, которые всегда говорят неправду. Каждого из сидящих спросили, про его двоих соседей — слева и справа — «сколько среди его соседей шпионов?». Каждый человек дал одинаковый ответ. Какое наибольшее количество среди сидящих за столом может быть разведчиков, если известно, что за столом обязательно есть хотя бы 1 разведчик и хотя бы 1 шпион?