Финансовый инжиниринг

2022/23 учебный год

Первый отборочный этап

Предметный тур. Информатика

Первая попытка. Задачи 8–11 класса

Задача II.1.1.1. Три квадрата (15 баллов)

Темы: математика, задачи для начинающих.

Условие

Фермер владеет участком земли в форме прямоугольника с длинами сторон a и b. Недавно фермер понял, что может разбить свой участок на три части так, что каждая часть будет иметь форму квадрата, и решил воспользоваться этой возможностью. Напишите программу, которая найдет площадь каждой части после разбиения.

Формат входных данных

На вход подается два натуральных числа a и b — длины сторон прямоугольника. Числа не превосходят 1000. Каждое число подается в отдельной строке. Гарантируется, что длины сторон таковы, что прямоугольник может быть разбит на три квадрата.

Формат выходных данных

Требуется вывести через пробел три натуральных числа — площади каждого из участков после разбиения. Числа могут выводиться в произвольном порядке.

Методика проверки

Программа проверяется на 12-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. Тест из условия задачи при проверке не используется.

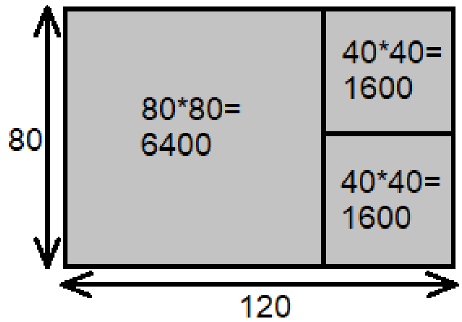
Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
120 80
Стандартный вывод
6400 1600 1600

Пояснения к примеру

При заданных размерах прямоугольник может быть разбит на три квадрата так, как показано на рисунке ниже. Обратите внимание, что могут существовать и другие варианты разбиения.



Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

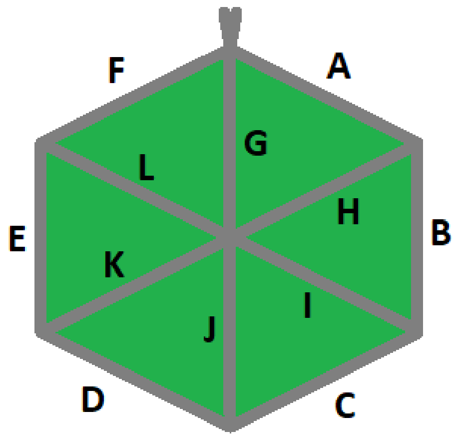
```python
a, b = map(int,input())
if a>b:
    a,b=b,a
s1=a*a
s2=(a*b-s1)//2
print(s1,s2,s2)
```

Задача II.1.1.2. Пробежка в шестиугольном парке (18 баллов)

Темы: конструктивное построение, задачи для начинающих.

Условие

Иван Иванович совершает пробежки по парку, который имеет форму шестиугольника. В парке 12 аллей, обозначенных символами латинского алфавита от «A» до «L». Схему парка смотрите на рисунке. Длина каждой аллеи ровно 100 м. В парке есть только один вход у перекрестка аллей «A», «F», «G». Иван Иванович хочет начать и закончить пробежку у входа в парк и пробежать ровно k м. На каждом перекрестке Иван Иванович может повернуть в любую строну, но он не хочет поворачивать назад.



Напишите программу, которая составит любой маршрут движения, удовлетворяющий указанным требованиям.

Формат входных данных

На вход в подается одно натуральное число k — желаемая длина маршрута, $300 \leqslant k \leqslant 10000$. Число k делится на 100 без остатка.

Формат выходных данных

Требуется вывести строку из $k/100$ символов, содержащую обозначения аллей в построенном маршруте.

Методика проверки

Программа проверяется на 18-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. Тест из условия задачи при проверке не используется.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
800

Стандартный вывод
FLKEFAHG

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
a=int(input())//100
ans=''
while a>=6:
    ans+='AHG'
```

```
    a-=3
sol=['','','','AHG','ABIG','ABCJG']
print(ans+sol[a])
```

Задача II.1.1.3. Знакопеременная сумма (25 баллов)

Темы: префиксные суммы.

Условие

Знакопеременной суммой последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется результат вычисления выражения $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots + (-1)^{k+1}a_k$. Другими словами, мы складываем все числа в последовательности, но элементы с нечетными номерами мы берем со знаком плюс, а четные со знаком минус.

Задан массив $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из n целых чисел и m запросов. Каждый запрос содержит по два натуральных числа b и e. В ответ на каждый запрос ваша программа должна взять подмассив с номерами элементов от b до e включительно и посчитать его знакопеременную сумму $x_b - x_{b+1} + x_{b+2} - x_{b+3} + \ldots + (-1)^{e-b}x_e$

Формат входных данных

На вход в первой строке подается одно натуральное число n размер массива чисел, $1 \leqslant n \leqslant 10^5$. Во второй строке через пробел записаны элемент массива целые числа $x_1, x_2, \ldots x_n$. Каждое из чисел не превосходит 10^6 по абсолютной величине. Далее в третьей строке записано одно натуральное число m количество запросов, $1 \leqslant m \leqslant 10^5$. В каждой из m последующих строк записано по два числа b_i и e_i таких, что $1 \leqslant b_i \leqslant e_i \leqslant n$. Каждая пара чисел задает границы подмассива для выполнения одного запроса.

Формат выходных данных

Требуется вывести через пробел m целых чисел $s_1, \ldots s_m$. Каждое из чисел должно быть равно знакопеременной сумме соответствующего подмассива.

Если вы программируете на Python, то убрать перенос строки в функции `print` можно при помощи именованного параметра `end`, например, `print(a,end=' ')`.

Методика проверки

Программа проверяется на 25-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. Тест из условия задачи при проверке не используется. В первых 10-ти тестах размер массива и количество запросов не превосходят 1000.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
5 7 -4 1 3 2 4 2 2 1 3 2 4 4 5

Стандартный вывод
-4 12 -2 1

Пояснения к примеру

Для каждого из запросов ответ получается следующим образом:

$$-4 = -4$$

$$7 - (-4) + 1 = 12$$

$$-4 - 1 + 3 = -2$$

$$3 - 2 = 1$$

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
n=int(input())
X=list(map(int,input().split()))
S=[0]
m=1
for x in X:
    S.append(S[-1]+m*x)
    m=-m
m=int(input())
ans=''
for i in range(3,m+3):
    b,e=map(int,input().split())
    s=S[e]-S[b-1]
    if b%2==0:
        s=-s
    print(s,end=' ')
```

Задача II.1.1.4. Проверка корректности маршрута (25 баллов)

Темы: реализация.

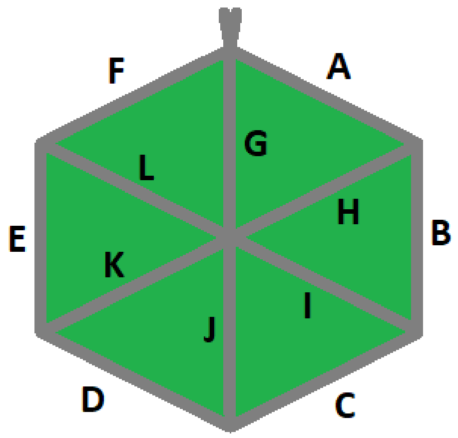
Условие

В некоторых случаях проверить корректность работы программы гораздо сложнее, чем написать ее. Сейчас у вас будет шанс в этом убедиться. От вас требуется написать программу для проверки корректности ответа второй задачи этой попытки. Напомним ее условие.

Имеется парк в виде шестиугольника с 12-ю аллеями, которые обозначены заглавными символами латиницы. В парке есть только один вход у перекрестка аллей «A», «F», «G». Схема парка приведена ниже. Требуется проверить корректность составленного маршрута движения по этому парку. Маршрут представляется как последовательность символов, представляющих аллеи в том порядке, в котором они были пройдены. Маршрут движения считается корректным если выполняются следующие требования.

- Описание маршрута содержит только символы от «A» до «L».
- Маршрут начинается и заканчивается у входа в парк.
- Запрещено разворачиваться на 180°. В частности, это означает, что начав движение с одного конца аллеи, вы обязательно дойдете до другого ее конца, причем на перекрестке вы должны будете перейти на другую аллею.

На вход вашей программе будет подано несколько описаний маршрутов. Ваша программа должна будет определить, какие из них удовлетворяют указанным требованиям.



Формат входных данных

На вход в первой строке подается одно натуральное число n — количество проверяемых маршрутов, $1 \leqslant n \leqslant 20$. Далее в n строках записаны сами маршруты. Описание каждого маршрута состоит из последовательности заглавных символов латиницы. Каждое описание не пустое, и содержит не более 100 символов.

Формат выходных данных

Программа должна вывести строку из n нулей и единиц. Единица на i-той позиции означает, что маршрут с номером i является корректным. В противном случае в этой позиции должен быть записан ноль.

Методика проверки

Программа проверяется на 5-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 5 баллов. Тест из условия задачи при проверке не используется.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
6 ABCDKHA FMG ABBA ABCEF BCDEF ABCDK

Стандартный вывод
100000

Пояснения к примеру

Первый маршрут является корректным.

Второй маршрут содержит недопустимое обозначение аллеи.

В третьем маршруте происходит разворот на 180°.

Четвертый маршрут не является связным. После третьего шага он приходит к перекрестку «C», «D», «J» и с него нельзя попасть на аллею «E».

Пятый маршрут начинается не у входа.

Шестой маршрут заканчивается не у входа.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
def checkway(way):
    c=0
    p='Z'
    for x in way:
        if x<'A' or x>'L' or x==p:
            return False
        p=x
        num=ord(x)-ord('A')
        if num>5:
            if c==6:
                c=num-6
            elif c==num-6:
                c=6
            else:
                return False
        else:
```

```
            if c==num:
                c=(c+1)%6
            elif c==(num+1)%6:
                c=(c+5)%6
            else:
                return False
    return c==0

m=int(input())
for i in range(m):
    print(int(checkway(input())))
```

Вторая попытка. Задачи 8–11 класса

Задача II.1.2.1. Стрелки часов (12 баллов)

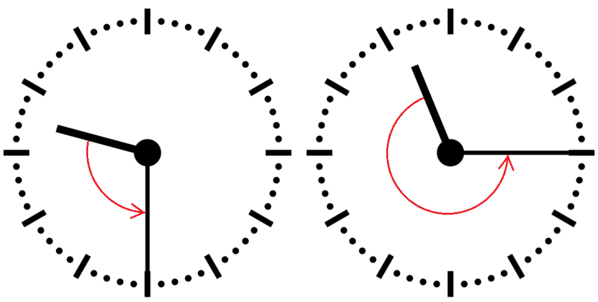
Темы: математика, задачи для начинающих.

Условие

Иван Иванович посмотрел на часы и заметил, что минутная и часовая стрелки образуют угол в $\alpha°$. С этого момента прошло h ч и m мин. Напишите программу, которая вычислит угол между стрелками после истечения этого времени.

Угол измеряется от часовой до минутной стрелки в направлении против хода часов. Если стрелки совпадают, то угол равен нулю. Рассмотрим пример на рисунке. Пусть $\alpha = 105°$. В частности, такой угол появляется в 9:30, так как минутная стрелка в этот момент указывает на $270°$, а часовая на $165°$. Через 1 ч 45 мин на часах будет 11:15. В этот момент времени минутная стрелка указывает на $0°$, а часовая на $112{,}5°$. Угол от часовой до минутной стрелки будет равен $360° - 112{,}5° = 247{,}5°$.

Отметим, что угол $\alpha = 105°$ появляется и в другие моменты времени, однако, это не повлияет на итоговый ответ.



Формат входных данных

На вход в первой строке подается одно целое неотрицательное число α исходный угол между стрелками, $0 \leqslant \alpha \leqslant 359$. Во второй строке через пробел на вход подается два числа h и m время, прошедшее с момента наблюдения в часах и минутах, $0 \leqslant h \leqslant 11$; $0 \leqslant m \leqslant 59$.

Формат выходных данных

Программа должна вывести одно вещественное число ответ к задаче. Ответ должен быть записан без погрешности.

Методика проверки

Программа проверяется на 24-х тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 0,5 балла. Тест из условия задачи при проверке не используется.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
105 1 45
Стандартный вывод
247.5

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
a = float(input())
h,m = map(int,input().split())
a = a - 5.5*(m+h*60)
while a<0:
    a += 360
print(a)
```

Задача II.1.2.2. Номера домов (18 баллов)

Темы: реализация.

Условие

В поселке Березовом на улице Березовой построено n домов с номерами от 1 до n, причем дома с нечетными номерами расположены на одной стороне улицы, а с четными — на другой.

Рано утром дворник вышел к одному из крайних домов на этой улице, который имел номер k, и начал подметать тротуар, двигаясь от одного края улицы к другому краю. Потом он перешел на противоположную сторону улицы и начал подметать тротуар там, двигаясь назад.

Напишите программу, которая выведет номера домов, мимо которых проходил дворник, по известным числам n и k. Для лучшего понимания прочитайте пояснения к примерам.

Формат входных данных

На вход в одной строке подается два натуральных числа n и k — количество домов и номер одного из крайних домов на улице, $4 \leqslant n \leqslant 100$. Число k может принимать одно из четырех значений: $1, 2, n-1, n$.

Формат выходных данных

Ваша программа должна вывести через пробел последовательность номеров домов, в том порядке, в котором их проходил дворник.

Если вы программируете на Python, то убрать перенос строки в функции `print` можно при помощи именованного параметра `end`, например, `print(a,end=' ')`.

Методика проверки

Программа проверяется на 36-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 0,5 балла. Тесты из условия задачи при проверке не используются.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`7 6`

Стандартный вывод
`6 4 2 1 3 5 7`

Пример №2

Стандартный ввод
`8 1`

Стандартный вывод
`1 3 5 7 8 6 4 2`

Пояснения к примеру

Рассмотрим первый пример. На улице 7 домов, дворник вышел к дому номер 6. Это означает, что он находится на четной стороне в конце улицы, и далее он будет двигаться к ее началу, проходя мимо домов 6, 4, 2. Потом он перейдет на противоположную сторону к дому номер 1 и пойдет к концу улицы, проходя мимо домов 1, 3, 5, 7.

Во втором примере на улице 8 домов, дворник вышел к дому номер 1. Это означает, что он находится на нечетной стороне в начале улицы, и далее он будет двигаться к ее концу, проходя мимо домов 1, 3, 5, 7. Потом он перейдет на противоположную сторону к дому номер 8 и пойдет к началу улицы, проходя мимо домов 8, 6, 4, 2.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
n,k=map(int,input().split())
if k==1:
    print(*range(1,n+1,2),*range(n-(n%2),0,-2))
elif k==2:
    print(*range(2,n+1,2),*range(n+(n%2)-1,0,-2))
elif k%2==1:
    print(*range(n+(n%2)-1,0,-2),*range(2,n+1,2))
else:
    print(*range(n-(n%2),0,-2),*range(1,n+1,2))
```

Задача II.1.2.3. Упорядочивание монет (25 баллов)

Темы: реализация, сортировки, теория графов.

Условие

В древнем кладе было найдено n монет различного веса. Каждая из монет была обозначена строчной буквой латиницы. Все обозначения были различными. Монеты были попарно взвешены на чашечных весах. Протокол взвешиваний состоял из $n(n-1)/2$ строк, каждая строка содержала ровно три символа. Первый и третий символ содержали обозначения монет, а во втором был записан результат сравнения: знак $<$ или знак $>$. Например, запись $d > b$ означает, что монета d тяжелее монеты b.

Взвешивания очень утомили лаборанта, и он просит вас написать программу, которая упорядочит монеты по возрастанию веса.

Формат входных данных

На вход в первой строке подается одно натуральное число n — количество монет, $4 \leqslant n \leqslant 26$. Далее в $n(n-1)/2$ строках записан протокол взвешиваний. Гарантируется, что протокол является корректным.

Формат выходных данных

Ваша программа должна вывести одну строку из n символов. Строка должна содержать обозначения монет в порядке возрастания их веса.

Методика проверки

Программа проверяется на 25-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. Тест из условия задачи при проверке не используется.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4
b<x
k>b
x<k
b<d
x>d
d<k

Стандартный вывод
bdxk

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
n=int(input())
cmp=set()
for i in range(n*(n-1)//2):
    cmp.add(input())
lst=list({s[0] for s in cmp} | {s[2] for s in cmp})
for i in range(len(lst)-1):
    for j in range(i+1,len(lst)):
        if lst[j]+'<'+lst[i] in cmp or lst[i]+'>'+lst[j] in cmp:
            lst[i],lst[j]=lst[j],lst[i]
print(''.join(lst))
```

Задача II.1.2.4. 2–3 дерево (25 баллов)

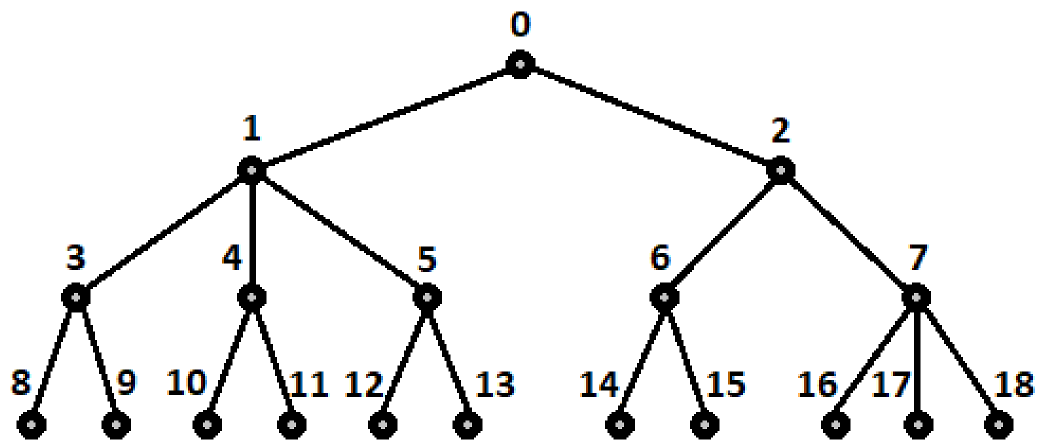
Темы: математика, графы и деревья, реализация.

Условие

Упорядоченное корневое дерево называется 2–3 деревом, если для него выполняются следующие условия:

- все узлы, кроме листьев, имеют два или три потомка;
- все листья находятся на одной высоте.

Пример 2–3 дерева приведен на рисунке ниже. Вы должны будете написать программу, которая составит произвольное 2–3 дерево с заданным количеством узлов или определит, что таких деревьев не существует.



Формат входных данных

На вход в первой строке подается одно натуральное число n — количество узлов в дереве, $2 \leqslant n \leqslant 100000$.

Формат выходных данных

Ваша программа должна вывести описание полученного дерева. Узлы дерева должны иметь номера от 0 до $n-1$ и быть упорядоченными сверху вниз и слева направо, как на рисунке. Для каждого узла, кроме корня, требуется указать номер его непосредственного предка. Вывод состоит из последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, записанных через пробел, где a_i это непосредственный предок узла с номером i.

Можно дать и другую интерпретацию. Вывод состоит из последовательности номеров нелистовых узлов, упорядоченных по возрастанию, причем номер каждого узла повторяется столько раз, сколько у него непосредственных потомков.

Если 2–3 дерево с указанным количеством узлов построить невозможно, то требуется вывести -1.

Методика проверки

Программа проверяется на 50-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 0,5 балла. Тесты из условия задачи при проверке не используются.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`19`

Стандартный вывод
`0 0 1 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 7`

Пример №2

Стандартный ввод
5

Стандартный вывод
-1

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
n=int(input())
k=1
curc=1
maxc=1
cnt=[1]
while maxc<n:
    maxc+=3**k
    curc+=2**k
    cnt.append(2**k)
    k+=1
if curc>n:
    print('-1')
else:
    for i in range(1,k):
        t=min(3*cnt[i-1]-cnt[i],(n-curc)//(2**(k-i)-1))
        curc+=t*(2**(k-i)-1)
        for j in range(i,k):
            cnt[j]+=t*(2**(j-i))
    m=0
    for i in range(k-1):
        p=cnt[i]
        s=cnt[i+1]
        while p>0:
            if s>2*p:
                print(m,m,m,end=' ')
                s-=3
            else:
                print(m,m,end=' ')
                s-=2
            p-=1
            m+=1
```

Третья попытка. Задачи 8–11 класса

Задача II.1.3.1. Количество нечетных чисел (12 баллов)

Темы: математика, задачи для начинающих.

Условие

Задан интервал целых чисел $[b; e]$. Вы должны написать программу, чтобы определить, сколько нечетных чисел принадлежит этому интервалу.

Обратите внимание, что интервал может быть достаточно большим, и решения, перебирающие все натуральные числа, не будут проходить часть тестов.

Формат входных данных

На вход в одной строке подается два целых числа b и e — границы интервала, $-10^{18} \leqslant b \leqslant e \leqslant 10^{18}$.

Формат выходных данных

Программа должна вывести одно число — количество нечетных чисел в заданном интервале.

Методика проверки

Программа проверяется на 24-х тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 0,5 балла. Тесты из условия задачи при проверке не используются.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`-3 8`

Стандартный вывод
`6`

Пример №2

Стандартный ввод
`0 0`

Стандартный вывод
`0`

Пояснения к примеру

В первом примере указанному интервалу принадлежат шесть нечетных чисел: -3, -1, 1, 3, 5, 7.

Во втором примере интервал не содержит нечетных чисел.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

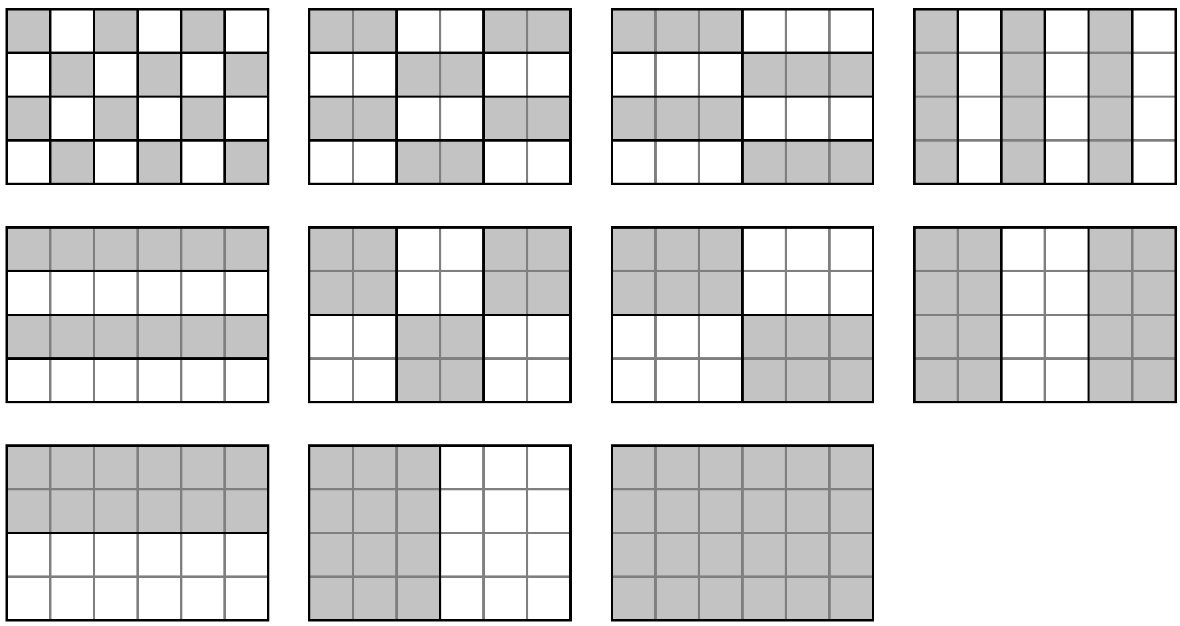
```
b, e = map(int,input().split())
print(((e+e%2)-(b-b%2))//2)
```

Задача II.1.3.2. Наибольший общий делитель прямоугольников (18 баллов)

Темы: математика, задачи для начинающих.

Условие

Будем говорить, что прямоугольник P является делителем прямоугольника Q, если прямоугольник Q можно замостить прямоугольниками P, причем все они должны иметь одинаковую ориентацию. Например, делителями прямоугольника 6×4 будут следующие прямоугольники: 1×1, 2×1, 3×1, 4×1, 6×1, 2×2, 3×2, 4×2, 6×2, 4×3, 6×4. Примеры замощений можно увидеть на рисунке ниже. Обратите внимание, что прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.



Ваша задача заключается в написании программы, которая найдет наибольший общий делитель двух заданных прямоугольников. Из двух прямоугольников большим считается тот, площадь которого больше. Наибольших общих делителей может быть два. В этом случае допускается вывести любой из этих двух прямоугольников.

Формат входных данных

На вход в двух строках подаются размеры двух прямоугольников. Каждая строка содержит два натуральных числа — длину и ширину прямоугольника. Каждое из чисел не превосходит 10^{18}. Гарантируется, что введенные значения будут таковы, что площадь прямоугольника, который должен получиться в качестве ответа, не превысит 10^{18}.

Формат выходных данных

Программа должна вывести через пробел два числа — размеры искомого прямоугольника. Числа можно выводить в любом порядке.

Методика проверки

Программа проверяется на 18-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. Тесты из условия задачи при проверке не используются.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
6 4 4 3

Стандартный вывод
4 3

Пример №2

Стандартный ввод
9 10 15 3

Стандартный вывод
3 5

Пример №3

Стандартный ввод
3 7 7 3

Стандартный вывод
3 7

Пример №4

Стандартный ввод
3 7 4 8

Стандартный вывод
1 1

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
def gcd(a,b):
    while a>0 and b>0:
        if a>b:
            a%=b
        else:
```

```python
            b%=a
    return a+b

a1,b1=map(int,input().split())
a2,b2=map(int,input().split())
a3=gcd(a1,a2)
b3=gcd(b1,b2)
a4=gcd(a1,b2)
b4=gcd(b1,a2)
if a3*b3>a4*b4:
    print(a3,b3)
else:
    print(a4,b4)
```

Задача II.1.3.3. Справедливый дележ (25 баллов)

Темы: реализация.

Условие

Два купца, живущие в разных городах, в далеком плавании купили несколько видов пряностей, и теперь хотят поделить их. Каждый из купцов будет продавать пряности только в своем городе, и цена каждой пряности в этих городах может отличаться. Купцы сочли, что будет справедливым, если они поделят пряности на две доли так, чтобы суммарная стоимость пряностей первой доли в первом городе была равна суммарной стоимости пряностей второй доли во втором городе. Существует несколько способов дележа, удовлетворяющих этому условию, но купцы хотят выбрать из них такой, при котором они получат максимум денег. Пряности являются сыпучим товаром, поэтому они могут быть поделены в любой пропорции

Рассмотрим пример. Есть три вида пряностей: перец, ваниль и корица. Стоимость всей партии перца в первом и втором городах составляет 120 и 200 условных единиц соответственно. Аналогичная стоимость партии ванили равна 180 и 140 условных единиц, а корицы — 100 и 60 условных единиц. Допустимым способом дележа будет, например, следующий: первый купец возьмет всю ваниль, второй — весь перец, а корицу они поделят поровну. Тогда стоимость доли первого купца в первом городе будет равна $180 + 100 \cdot 0,5 = 230$. Стоимость доли второго купца во втором городе составит $200+60 \cdot 0,5 = 230$. Стоимости долей равны, поэтому такой вариант дележа допустим. Но более выгодным будет другой вариант. Первый купец возьмет всю корицу и $3/4$ ванили, а второй купец — весь перец и $1/4$ ванили. Тогда стоимость доли в первом городе составит $100+180 \cdot 0,75 = 235$ и $200+140 \cdot 0,25 = 235$ во втором городе. Таким образом, второй вариант является более предпочтительным.

Напишите программу, которая найдет максимальную стоимость долей, при условии того, что дележ будет справедливым.

Формат входных данных

На вход в первой строке подается одно натуральное число n — количество видов пряностей, $1 \leqslant n \leqslant 100$. Во второй строке через пробел записаны n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — цены всех видов пряностей в первом городе. Аналогично в третьей строке записаны числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — цены всех видов пряностей во втором городе, $1 \leqslant a_i, b_i \leqslant 10^6$.

Формат выходных данных

Программа должна вывести одно число — максимальную стоимость долей. Это число может быть вещественным. Ответ будет считаться верным, если он отличается от ответа жюри не более чем на $0,01$.

Методика проверки

Программа проверяется на 25-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. В первых пяти тестах $n \leqslant 3$. В первых 15 тестах $n \leqslant 10$. Тесты из условия задачи при проверке не используются.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
3 120 180 100 200 140 60

Стандартный вывод
235.0

Пример №2

Стандартный ввод
1 100 200

Стандартный вывод
66.66666666666667

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
n=int(input())
A=map(float,input().split())
B=map(float,input().split())
p=list(zip(A,B))
p.sort(key=lambda x:x[1]/x[0])
s1,s2=0,0
i,j=0,n-1
while i<=j:
    if s1<s2:
        s1+=p[i][0]
        i+=1
    else:
        s2+=p[j][1]
        j-=1
if s1<s2:
```

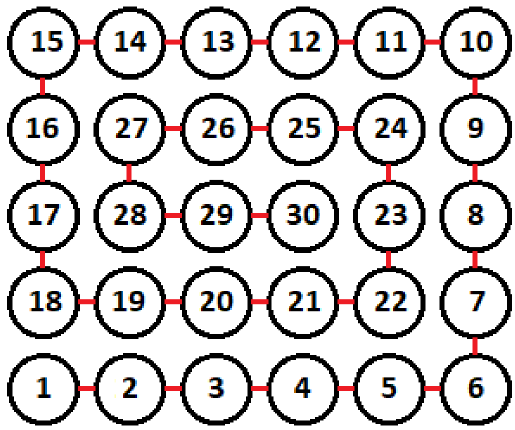
```
    s1+=(s2-s1)*p[j+1][0]/(p[j+1][0]+p[j+1][1])
else:
    s1-=(s1-s2)*p[i-1][0]/(p[i-1][0]+p[i-1][1])
print(s1)
```

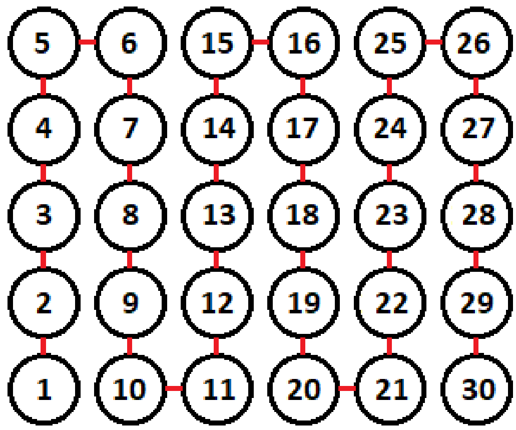
Задача II.1.3.4. Чай с лимоном и сахаром (25 баллов)

Темы: реализация.

Условие

На прямоугольном столе в n рядов расставлены стаканы с чаем, в каждом ряде по m стаканов. Аня ходит вокруг стола и бросает в каждый стакан по ломтику лимона. Нумерация стаканов на рисунке слева соответствует той последовательности, в которой Аня переходит от одного стакана к другому. Яна ходит вдоль одного края стола туда и обратно, и бросает в каждый стакан кусочек сахара. Нумерация стаканов на рисунке справа соответствует той последовательности, в которой Яна переходит от одного стакана к другому.





Будем считать, что ломтик лимона и кусочек сахара в один стакан девочки бросают ровно за одну секунду. Напишите программу, которая найдет количество стаканов, в которых через t с лежит и лимон и сахар. В каждом тесте ваша программа должна будет ответить на k запросов. При этом количество и расположение стаканов на столе единое для всех запросов в одном тесте.

Формат входных данных

На вход в первой строке подается два натуральных числа n, m и k — количество рядов на столе, количество кружек в каждом ряду и количество запросов, $1 \leqslant n, m \leqslant 1000$, $1 \leqslant k \leqslant 10^5$. Во второй строке через пробел записано k натуральных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — моменты времени, для которых требуется решить задачу, $1 \leqslant t_i \leqslant nm$. Каждый момент времени может встречаться более 1 раза.

Формат выходных данных

Программа должна вывести в одной строке через пробел k чисел — ответы для каждого из заданных моментов времени.

Методика проверки

Программа проверяется на 25-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. В первых пятнадцати тестах $n, m \leqslant 10$. Тест из условия задачи при проверке не используется.

Примеры

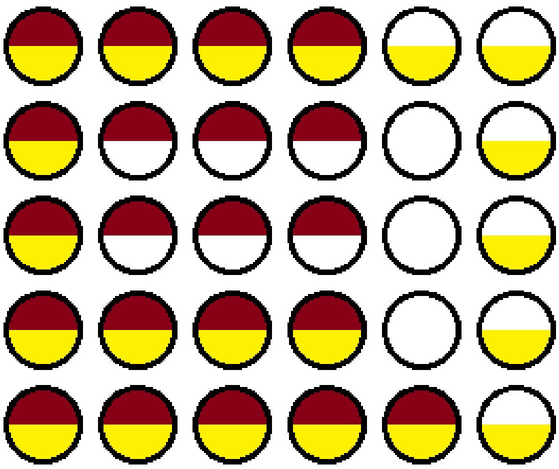
Пример №1

Стандартный ввод
5 6 4 1 21 30 21

Стандартный вывод
1 15 30 15

Пояснения к примеру

На рисунке ниже показано решение задачи для теста из условия задачи после двадцать первой секунды. Желтым цветом помечены кружки с лимоном, коричневым — кружки с сахаром. Из рисунка видно, что в 15 чашках есть и лимон, и сахар.



Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
n,m,k=map(int,input().split())
F=[[0 for i in range(m)] for j in range(n)]
A=[0]
i1,j1,i2,j2,s=0,0,0,0,0
dr=0
for i in range(n*m):
    F[i1][j1]+=1
    F[i2][j2]+=2
    if F[i1][j1]==3:
```

```
        s+=1
    if (i2!=i1 or j2!=j1) and F[i2][j2]==3:
        s+=1
    A.append(s)
    if dr==0:
        if j1+1==m or (F[i1][j1+1]&1)==1:
            dr=1
    elif dr==1:
        if i1+1==n or (F[i1+1][j1]&1)==1:
            dr=2
    elif dr==2:
        if j1==0 or  (F[i1][j1-1]&1)==1:
            dr=3
    else:
        if i1==0 or (F[i1-1][j1]&1)==1:
            dr=0
    if dr==0:
        j1+=1
    elif dr==1:
        i1+=1
    elif dr==2:
        j1-=1
    else:
        i1-=1
    if j2%2==0:
        if i2==n-1:
            j2+=1
        else:
            i2+=1
    else:
        if i2==0:
            j2+=1
        else:
            i2-=1
for i in input().split():
    print(A[int(i)])
```

Четвертая попытка. Задачи 8–11 класса

Задача II.1.4.1. Сумма элементов списка (12 баллов)

Темы: математика, задачи для начинающих.

Условие

Алиса изучает списки в языке Python. По заданию из учебника она написала такую программу.

```
n = int(input())
x = [i%10 for i in range(n)]
print(sum(x))
```

Эта программа читает с консоли натуральное число n и делает список этой длины, состоящий из чисел от нуля до девяти, которые идут по кругу. Например, для $n = 25$ список будет иметь вид:

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4]
```

В последней строчке на экран выводится сумма элементов этого списка. Для указанного списка, в частности, будет выведено число 100.

Боб очень недоволен учебником. Он считает, что учебник упускает главное — списки нужны для хранения информации, значимой для работы программы, а это задание можно выполнить, как минимум, без списков, а в идеале — без циклов и условий.

Напишите программу для этого задания, которую Боб сочтет удовлетворительной. Для этого она должна быстро и корректно работать для чисел до 10^{15}.

Формат входных данных

На вход подается одно натуральное число n, которое не превосходит 10^{15}.

Формат выходных данных

Программа должна вывести одно число — ответ, который напечатала бы приведенная выше программа, если бы она была способна работать со столь большими числами.

Методика проверки

Программа проверяется на 24-х тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 0,5 балла. Тесты из условия задачи при проверке не используются.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
25

Стандартный вывод
100

Пример №2

Стандартный ввод
1000000000000000

Стандартный вывод
4500000000000000

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
n = int(input())
return str((n//10)*45+(n%10)*(n%10-1)//2)
```

Задача II.1.4.2. Автокорреляционная функция дискретного сигнала (18 баллов)

Темы: математика, реализация.

Условие

Автокорреляционная функция часто применяется при анализе сигналов, например, энцефалограммы человека или в радиолокации. Мы будем рассматривать некоторый цифровой сигнал $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, где каждое значение a_i равно 1 или -1. Определим автокорреляционную функцию $u(t)$ по следующей формуле:

$$u(t) = \sum_{0 \leqslant i < n-t} a_i a_{i+t}.$$

Другими словами, если сигнал задан в виде списка из n значений, то чтобы вычислить автокорреляционную функцию в точке t, требуется взять одну копию списка без первых t элементов, другую копию списка без последних t элементов, поэлементно перемножить эти списки, и найти сумму произведений. Рассмотрим пример. Пусть сигнал содержит шесть элементов $1, 1, -1, 1, -1, 1$. Найдем $u(2)$. Исходная последовательность без первых двух элементов имеет вид $-1, 1, -1, 1$. Исходная последовательность без последних двух элементов имеет вид $1, 1, -1, 1$. Тогда $u(2) = (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot -1) + (1 \cdot 1) = 2$

По такому же принципу можно посчитать и остальные значения для t от нуля до пяти.

$u(0) = (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot -1) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot -1) + (1 \cdot 1) = 6$

$u(1) = (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 1) + (1 \cdot -1) + (-1 \cdot 1) + (1 \cdot -1) = -3$

$u(3) = (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 1) + (1 \cdot -1) = -1$

$u(4) = (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 0$

$u(5) = 1 \cdot 1 = 1$

Напишите программу, которая по заданному дискретному сигналу найдет значения автокорреляционной функции для всех t от 0 до $n - 1$.

Формат входных данных

На вход в первой строке подается одно натуральное число n — длина сигнала, $1 \leqslant n \leqslant 100$. Во второй строке через пробел записаны числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, задающие дискретный сигнал. Каждое значение a_i равно 1 или -1.

Формат выходных данных

Программа должна вывести через пробел n целых чисел — значения автокорреляционной функции $u(0), u(1), \ldots u(n-1)$.

Если вы программируете на Python, то убрать перенос строки в функции `print` можно при помощи именованного параметра `end`, например, `print(a,end=' ')`.

Методика проверки

Программа проверяется на 18-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. Тест из условия задачи при проверке не используется.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
6 1 1 -1 1 -1 1

Стандартный вывод
6 -3 2 -1 0 1

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
n=int(input())
a=list(map(int,input().split()))
for k in range(n):
    print(sum([x*y for x,y in zip(a[k:],a[:n-k])]),end=' ')
```

Задача II.1.4.3. Три фишки (25 баллов)

Темы: игры.

Условие

Алиса и Боб играют в следующую игру. Имеется игровое поле в виде последовательности клеток, расположенных друг за другом. На поле расположены три фишки, каждая фишка в своей клетке. За один ход каждый игрок должен переместить одну фишку вправо на произвольное ненулевое число клеток. При этом фишка, которой делается ход, не может встать в клетку, где расположена другая фишка или перепрыгнуть через нее. Выигрывает тот игрок, который смог сделать последний ход.

Рассмотрим пример.

Здесь возможны следующие ходы: сместить правую фишку на одну клетку; сместить среднюю фишку на одну клетку; сместить левую фишку на одну, две, три или четыре клетки.

Алиса всегда делает первый ход, а фишки расставляет Боб. Но Боб не хочет побеждать, он хочет, чтобы Алиса нашла выигрышную стратегию. Поэтому он расставляет фишки так, чтобы Алиса могла гарантированно выиграть.

Например, в приведенной выше позиции Алиса должна сместить самую левую фишку на три клетки.

Далее игра зависит от хода Боба. Предположим, он сместит правую фишку на одну клетку. Тогда Алиса в свой ход сместит левую фишку на одну клетку.

Теперь Боб может ходить только средней фишкой. Если он сдвинет ее на одну клетку, то Алиса сдвинет левую фишку на одну клетку.

Бобу остается вновь ходить средней фишкой. Он сдвинет ее на одну клетку, Алиса сдвинет левую фишку на одну клетку и победит.

Для всех других ходов Боба у Алисы также всегда найдется ход, ведущий к победе.

Вы должны написать программу, которая по заданной позиции найдет ход, после которого Алиса сможет победить независимо от дальнейшей игры Боба. Если выигрышных ходов будет несколько, то Алиса может сделать любой из них. Напомним, что исходная позиция будет такой, что найдется как минимум один ход, гарантированно ведущий к победе.

Формат входных данных

На вход подается строка представляющая игровое поле. Пустая клетка в строке обозначена нулем, клетка с фишкой обозначена единицей. Длина строки не превосходит 1000 символов. В строке ровно три единицы.

Формат выходных данных

Программа должна вывести строку, представляющую игровое поле после хода Алисы, в том же формате, в котором она поступает на вход.

Методика проверки

Программа проверяется на 25-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. Тест из условия задачи при проверке не используется.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
0100001010

Стандартный вывод
0000101010

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
x=list(reversed(input()))
m=[0,0,0]
k=0
for c in x:
    if c=='0':
        m[k]+=1
    elif k<2:
        k+=1
    else:
        break
if m[0]>m[2]:
    x[m[0]]='0'
    x[m[2]]='1'
else:
    x[m[0]+m[1]+m[2]+2]='0'
    x[2*m[0]+m[1]+2]='1'
print(''.join(reversed(x)))
```

Задача II.1.4.4. Выбор купюр (25 баллов)

Темы: реализация.

Условие

В денежной системе Бурляндии выпускаются банкноты всех номиналов от a до $2a$ включительно. У Алисы в бумажнике есть ровно одна банкнота каждого номинала. Алиса хочет сделать покупку ценой b и расплатиться без сдачи. Кроме того, Алиса хочет, чтобы количество потраченных банкнот было как можно меньшим. Напишите программу, которая поможет Алисе выбрать банкноты так, чтобы сумма их номиналов была равна b, а их количество было наименьшим среди возможных. Если указанным условиям удовлетворяет несколько наборов банкнот, то ваша программа может вывести любой из них.

Формат входных данных

На вход в одной строке подается два натуральных числа a и b — минимальный из номиналов купюр и требуемая сумма, $1 \leqslant a \leqslant 100000$. Гарантируется, что для заданной суммы b существует способ получить ее из имеющихся купюр.

Формат выходных данных

Программа должна вывести в одной строке через пробел номиналы всех банкнот, которые потребуются для оплаты. ***Все номиналы должны быть упорядочены по возрастанию.***

Методика проверки

Программа проверяется на 25-ти тестах. Прохождение каждого теста оценивается в 1 балл. Тест из условия задачи при проверке не используется.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`10 99`

Стандартный вывод
`10 15 17 18 19 20`

Пояснения к примеру

Сумма чисел, указанных в ответе, равна 99, и все числа лежат в диапазоне от 10 до 20 включительно. При этом сумма номиналов пяти самых ценных банкнот меньше чем 99, поэтому оплатить указанную сумму пятью или меньшим числом банкнот невозможно. Однако другие варианты получения требуемой суммы шестью банкнотами возможны, например, 13 14 15 18 19 20. Такой ответ тоже будет засчитан.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
a,b=map(int,input().split())
up,dn,k=0,0,0
while up<b:
    up+=2*a-k
    dn+=a+k
    k+=1

if a>k-1:
    t=(b-dn)//(a-k+1)
    r=(b-dn)%(a-k+1)
else:
    t,r=0,0
if t==k:
    print(*range(2*a-t+1,2*a+1))
else:
    print(*range(a,a+k-t-1),a+k-1-t+r,*range(2*a-t+1,2*a+1))
```

Предметный тур. Математика

Первая попытка. Задачи 8–9 класса

Задача II.2.1.1. (25 баллов)

Темы: вероятность, несовместные события.

Условие

Участникам «математического марафона» предлагается для решения n задач, из которых k имеют повышенную сложность. Задачи решаются по одной в случайном порядке. Участник получает следующую задачу лишь после того, как решил предыдущую. Решив задачу повышенной сложности, участник переходит на следующий уровень. Найти вероятность того, что для выхода на следующий уровень участнику придется решить не более трех задач. Ответ округлить до сотых.

Решение

Событие A, при котором участник решил не более трёх задач до выхода на следующий уровень, можно разбить на три несовместных события:

- A_1 — участник решил ровно одну задачу;
- A_2 — участник решил ровно две задачи;
- A_3 — участник решил ровно три задачи.

В первом случае участник решил одну из k сложных задач, а всего он мог выбрать одну из n задач. Поэтому:

$$P(A_1) = \frac{k}{n}.$$

Во втором случае участник сначала решил простую, а затем сложную задачу. Всего способов выбрать пару задач: $n(n-1)$. Всего способов выбрать сначала простую, а затем сложную задачу: $(n-k)k$. Поэтому:

$$P(A_2) = \frac{(n-k)k}{n(n-1)}.$$

В третьем случае участник сначала решил две простых, а затем сложную задачу. Всего способов выбрать тройку задач: $n(n-1)(n-2)$. Всего способов выбрать сначала две простых, а затем сложную задачу: $(n-k)(n-k-1)k$. Поэтому:

$$P(A_3) = \frac{(n-k)(n-k-1)k}{n(n-1)(n-2)}.$$

Таким образом, искомая вероятность:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{k}{n} + \frac{(n-k)k}{n(n-1)} + \frac{(n-k)(n-k-1)k}{n(n-1)(n-2)}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	10	20	1
k	3	7	1

Ответ: $\dfrac{k}{n}+\dfrac{(n-k)k}{n(n-1)}+\dfrac{(n-k)(n-k-1)k}{n(n-1)(n-2)}$.

Задача II.2.1.2. (20 баллов)

Темы: *комбинаторика.*

Условие

В вазе лежат конфеты, среди которых нет одинаковых. После обеда мама разрешила своим двум детям взять по три конфеты. Сначала одну конфету берет младший, потом одну конфету берет старший, затем одну конфету опять берет младший и т. д. Известно, что у младшего ребенка число вариантов выбора на n больше, чем у старшего. Сколько конфет лежало в вазе до того, как дети стали их брать?

Решение

Пусть k — количество конфет в вазе.

Младший выбирает сначала одну из k конфет, затем одну из $k-2$, и, наконец, одну из $k-4$. Всего вариантов у младшего ребёнка $k(k-2)(k-4)$.

Старший выбирает сначала одну из $k-1$ конфет, затем одну из $k-3$, и, наконец, одну из $k-5$. Всего вариантов у старшего ребёнка $(k-1)(k-3)(k-5)$.

По условию:
$$k(k-2)(k-4)-(k-1)(k-3)(k-5)=n.$$

Раскрыв скобки, получаем квадратное уравнение:
$$3k^2-15k+15-n=0.$$

Решая его и отбрасывая отрицательный корень, находим:
$$k=\frac{15+\sqrt{45+12n}}{6}.$$

Диапазоны

$$n=3(k^2-5k+5),$$

где $k=15,...,30$.

Ответ: $\dfrac{15+\sqrt{45+12n}}{6}$.

Задача II.2.1.3. (30 баллов)

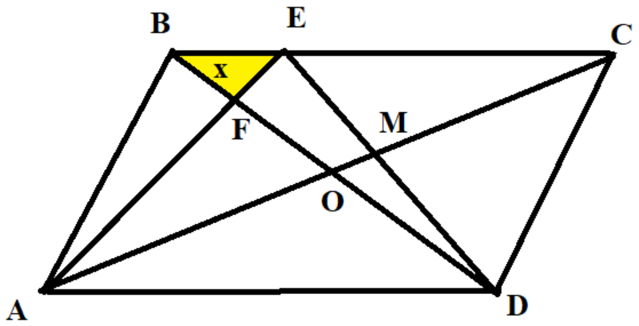
Темы: геометрия, площадь, подобные треугольники.

Условие

В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На стороне BC отмечена точка E. Диагональ BD пересекает отрезок AE в точке F так, что площадь треугольника ABF равна a. Диагональ AC пересекает отрезок DE в точке M так, что площадь треугольника DMC равна b. Найдите площадь треугольника BEF, если площадь четырёхугольника $EFOM$ равна c. Ответ округлите до сотых.

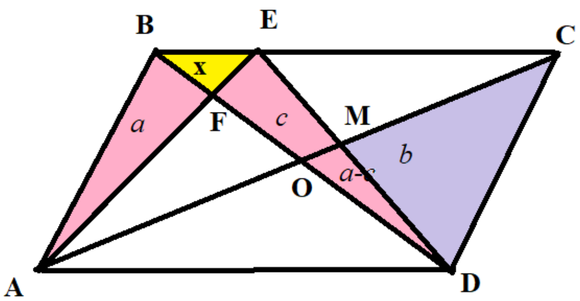
Решение

Обозначим искомую площадь за x.



Рассмотрим треугольники ABE и DBE. Их площади совпадают, следовательно, $a + x = x + c + S_{DOM}$. Отсюда:

$$S_{DOM} = a - c.$$



Поскольку $S_{ABO} = S_{DOC} = b + a - c$, то $S_{AFO} = S_{ABO} - a = b - c$.

Теперь найдём площадь треугольника AFD:

$$S_{AFD} = S_{AFO} + S_{AOD} = S_{AFO} + S_{OCD} = (b - c) + (a - c + b) = 2(b - c) + a.$$

Треугольники BEF и FED имеют одинаковую высоту (из вершины E). Поэтому их площади относятся как основания:

$$\frac{x}{a} = \frac{BF}{FD}.$$

Треугольники ABF и AFD также имеют общую высоту (из вершины A).

Следовательно, отношение их оснований равно отношению их площадей:

$$\frac{BF}{FD} = \frac{a}{2(b-c)+a}.$$

Сопоставляя два последних равенства, находим:

$$x = \frac{a^2}{2(b-c)+a}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
a	7	15	1
b	8	16	1
c	1	6	1

Ответ: $\dfrac{a^2}{2(b-c)+a}$.

Задача II.2.1.4. (25 баллов)

Темы: алгебра, система линейных уравнений, задача на работу.

Условие

Петя и Вася в первый день хакатона совместно за n часов написали программу, решающую предложенную задачу. Через каждые два часа работы над программой мальчики делали короткий перерыв. При этом производительность после перерыва у Пети становилась на 20%, а у Васи — на 10% меньше производительности до перерыва. Во второй день Петя и вовсе потерял интерес к задачам, а Васю, наоборот, заинтересовала предложенная тематика. Поэтому производительность Пети снизилась в k раз, а у Васи она увеличилась в k раз (относительно начала первого дня). Производительность мальчиков падала через каждые два часа так же, как и в первый день. В итоге во второй день они потратили $n-2$ часа на совместное написание кода того же объёма, что и в первый день. Во сколько раз в первый день изначальная производительность Васи отличалась от изначальной производительности Пети? Ответ округлите до сотых.

Решение

Пусть x — производительность Пети, y — производительность Васи. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(x+y) + 2(0,8x+0,9y) + (n-4)(0,8^2x+0,9^2y) = 1, \\ 2\left(\frac{x}{k}+ky\right) + (n-4)\left(\frac{0,8x}{k}+0,9ky\right) = 1. \end{cases}$$

Приводя подобные слагаемые, имеем:

$$\begin{cases}(3,6+0,8^2(n-4))x+(3,8+0,9^2(n-4))y=1,\\ \frac{2+0,8(n-4)}{k}x+(2+0,9(n-4))ky=1.\end{cases}$$

Разделив каждое уравнение на x, находим:

$$\begin{cases}3,6+0,8^2(n-4)+(3,8+0,9^2(n-4))\frac{y}{x}=\frac{1}{x},\\ \frac{2+0,8(n-4)}{k}+(2+0,9(n-4))k\frac{y}{x}=\frac{1}{x}.\end{cases}$$

Вычитая уравнения, получаем:

$$(3,8+0,9^2(n-4)-2k-0,9k(n-4))\frac{y}{x}=\frac{2+0,8(n-4)}{k}-3,6-0,8^2(n-4).$$

Отсюда:

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{2+0,8(n-4)}{k}-3,6-0,8^2(n-4)}{3,8+0,9^2(n-4)-2k-0,9k(n-4)}$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	4,5	5	0,5
k	2	5	1

Ответ: $\dfrac{\frac{2+0,8(n-4)}{k}-3,6-0,8^2(n-4)}{3,8+0,9^2(n-4)-2k-0,9k(n-4)}$.

Первая попытка. Задачи 10–11 класса

Задача II.2.2.1. (20 баллов)

Темы: теория вероятностей, формула Байеса.

Условие

Дистрибьютор покупает компьютеры на трех фабриках. Первая фабрика подготовила к отгрузке m_1 компьютеров, k_1 из которых имеют брак. Вторая фабрика — m_2 компьютеров, среди которых k_2 бракованных. Третья фабрика — m_3 компьютеров, среди которых k_3 бракованных. Дистрибьютор приобрел у каждой фабрики по одному компьютеру. Оказалось, что компьютер, купленный покупателем у дистрибьютора, бракованный. Какова вероятность того, что этот компьютер изготовлен j-й фабрикой? Ответ округлить до сотых.

Решение

Пусть событие A — купленный компьютер бракованный, событие H_i — купленный компьютер изготовлен на i-й фабрике. В задаче спрашивается, чему равна условная вероятность $P(H_j|A)$.

Имеем для всех $i = 1, 2, 3$:

$$P(H_i) = \frac{1}{3}, \quad P(A|H_i) = \frac{k_i}{m_i}.$$

Тогда по формуле Байеса

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i)} = \left(\frac{k_j}{m_j}\right) / \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_3}{m_3}\right).$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
m_1	6	8	1
k_1	2	3	1
m_2	8	10	1
k_2	2	3	1
m_3	7	9	1
k_3	1	2	1
j	1	3	1

Ответ: $\left(\frac{k_j}{m_j}\right) / \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_3}{m_3}\right)$.

Задача II.2.2.2. (25 баллов)

Темы: комбинаторика, биномиальные коэффициенты.

Условие

На переэкзаменовку пришло a студентов 1-го курса и b студентов 2-го курса. Преподаватель пригласил в аудиторию половину студентов 2-го курса и несколько студентов 1-го курса. Пока студенты готовились, преподаватель подсчитал, что существует c способов вызвать студентов таким образом (то есть половину пришедших второкурсников и количество вызванных им первокурсников). Какое наибольшее возможное число студентов 1-го курса преподаватель мог вызвать, чтобы полученное им число вариантов не изменилось?

Решение

Пусть k — число вызванных преподавателем первокурсников. Тогда число способов вызвать половину второкурсников и k первокурсников:

$$c = C_b^{b/2} C_a^k.$$

Зная число сочетаний $C_a^k = \frac{c}{C_b^{b/2}}$ и число a, найдём $k \leqslant a/2$ (можно, например, воспользоваться треугольником Паскаля).

Так как $C_a^k = C_a^{a-k}$ и $C_a^k \neq C_a^m$ при $m \neq k$ и $m \neq a-k$, то полученное преподавателем число вариантов не изменится, если вызывать $a-k$ первокурсников.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
a	9	12	1
b	6	12	2
k	3	$\lceil a/2 \rceil - 1$	1
c	$C_b^{b/2} C_a^k$		

Ответ: $a-k$.

Задача II.2.2.3. (30 баллов)

Темы: стереометрия, исследование на экстремум.

Условие

Шар радиуса r см составлен из двух полушаров: из меди плотности 8,9 г/см^3 и олова плотности 7,3 г/см^3. Из этого шара выпилили деталь в форме прямоугольного параллелепипеда наибольшего объёма, стороны основания которого относятся как k:1. Найти массу опилок (то есть всех частей, оставшихся от шара после выпиливания детали).

Принять $\pi = 3,1416$ и выразить ответ в г (с точностью до 1 г).

Решение

Выпиленная деталь представляет собой прямоугольный параллелепипед, вписанный в шар. Её объём:

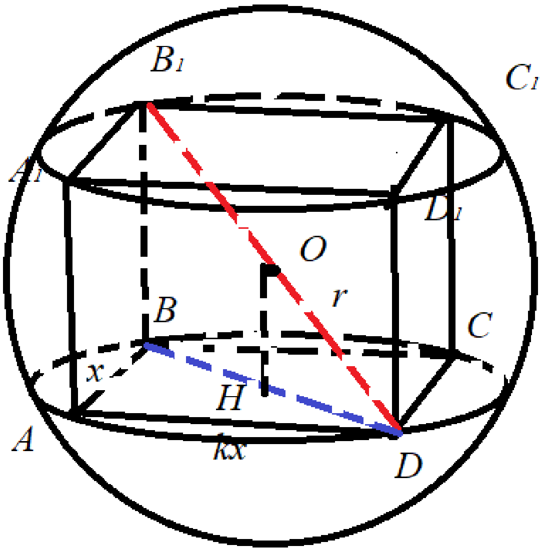
$$V = kx^2 \cdot 2OH.$$

Из треугольников ODH и ABD находим:

$$OH^2 = OD^2 - HD^2 = r^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{x^2 + (kx)^2}{4} = \frac{4r^2 - x^2(k^2+1)}{4}.$$

Тогда:

$$V = kx^2 \cdot 2\sqrt{\frac{4r^2 - x^2(k^2+1)}{4}} = kx^2\sqrt{4r^2 - x^2(k^2+1)}.$$



Найдём максимум функции $V(x)$. Её производная:

$$V'(x) = \frac{2kx(4r^2 - x^2(k^2+1)) - kx^3(k^2+1)}{\sqrt{4r^2 - x^2(k^2+1)}} = kx\frac{8r^2 - 3(k^2+1)x^2}{\sqrt{4r^2-(k^2+1)x^2}}$$

на промежутке $(0, \frac{2r}{\sqrt{k^2+1}})$ имеет единственный корень:

$$x = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3(k^2+1)}}.$$

Исследование знаков производной показывает, что это точка максимума, а наибольший объём равен:

$$V_{max} = \frac{16kr^3}{3\sqrt{3}(k^2+1)}.$$

Объём опилок равен:

$$V_o = \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{16kr^3}{3\sqrt{3}(k^2+1)} = \frac{4r^3}{3}\left(\pi - \frac{4k}{\sqrt{3}(k^2+1)}\right).$$

Поскольку половина этого объёма сделана из олова (плотности $\rho_1 = 7,3$ г/см^3), а половина — из меди (плотности $\rho_2 = 8,9$ г/см^3), то масса опилок равна:

$$M_o = \frac{V_o}{2}\rho_1 + \frac{V_o}{2}\rho_2 = V_o\frac{\rho_1+\rho_2}{2} = 8,1V_0 = 10,8r^3\left(\pi - \frac{4k}{\sqrt{3}(k^2+1)}\right).$$

Погрешность 1.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
r	2	6	0,2
k	2	10	1

Ответ: $10,8r^3\left(\pi - \dfrac{4k}{\sqrt{3}(k^2+1)}\right)$.

Задача II.2.2.4. (25 баллов)

Темы: алгебра, функциональное уравнение, линейная система.

Условие

Найти значение $f(1)$ для функции f, удовлетворяющей при всех $x \neq a$ уравнению

$$f(x) + kx \cdot f\left(\frac{ax+b}{x-a}\right) = n.$$

Записать ответ с точностью до 0,01.

Решение

Пусть $y = \frac{ax+b}{x-a}$. Заметим, что $y \neq a$. Поэтому выполнено равенство:

$$f(y) + kyf\left(\frac{ay+b}{y-a}\right) = n.$$

Так как:

$$x = \frac{ay+b}{y-a},$$

получаем:

$$f\left(\frac{ax+b}{x-a}\right) + k\frac{ax+b}{x-a}f(x) = n.$$

Положим $X = f(x)$, $Y = f\left(\frac{ax+b}{x-a}\right)$. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} X + kxY = n, \\ Y + kyX = n. \end{cases}$$

Решая эту линейную относительно переменных X и Y систему, получаем:

$$X = \frac{n(1-kx)}{1-k^2xy}.$$

Учитывая, что при $x = 1$ будет $y = \dfrac{a+b}{1-a}$, находим $f(1) = \dfrac{n(k-1)(1-a)}{k^2(a+b)-(1-a)}$.

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
a	20	50	10
b	2	5	1
k	2	5	1
n	100	200	20

Ответ: $\dfrac{n(k-1)(1-a)}{k^2(a+b)-(1-a)}$.

Вторая попытка. Задачи 8–9 класса

Задача II.2.3.1. (20 баллов)

Темы: теория вероятности, дополнительное событие.

Условие

Участникам олимпиады предлагается для решения n задач. Вася может решить каждую из задач с вероятностью p. Найти вероятность того, что Вася решит хотя бы одну задачу. Ответ округлить до сотых.

Решение

Пусть A — событие, при котором Вася решил хотя бы одну задачу. Вычислим вероятность дополнительного события $\overline{A}$ — Вася не решил ни одну задачу:

$$P(\overline{A}) = (1-p)^n.$$

Тогда:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1-p)^n.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	4	10	1
p	0,1	0,5	0,1

Ответ: $1-(1-p)^n$.

Задача II.2.3.2. (25 баллов)

Темы: комбинаторика.

Условие

В спортивном семейном лагере отдыхают n семей, каждая из которых состоит из 5 человек: отца, матери и троих детей. Для предстоящих соревнований с представителями другого спортивного лагеря надо составить команду из пяти человек, в которой должен быть один мужчина, одна женщина, трое детей, но не должно быть родственников. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Сначала выбираем мужчину, для этого имеется n способов. Далее выбираем женщину из оставшихся $n-1$ семей. Далее выбираем детей из оставшихся $n-2$ семей:

$3n-6$ способов выбрать первого, $3n-9$ способов — второго (число способов уменьшается на 3, так как запрещено выбирать братьев или сестёр уже выбранного ребёнка), $3n-12$ способов — третьего.

Получается $N = n(n-1)(3n-6)(3n-9)(3n-12)$ вариантов. Однако перестановки выбранных детей не дают новой команды, поэтому полученное число нужно разделить на 3!. Итого имеется:

$$\frac{N}{3!} = \frac{4.5 \cdot n!}{(n-5)!}$$

вариантов.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	5	25	1

Ответ: $\dfrac{4.5 \cdot n!}{(n-5)!}$.

Задача II.2.3.3. (25 баллов)

Темы: планиметрия, прямоугольный треугольник, вписанная окружность.

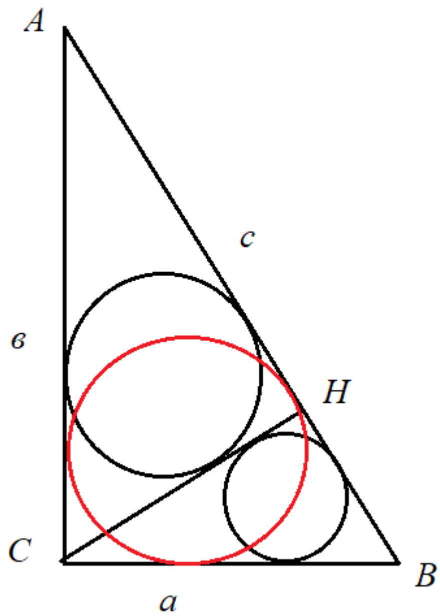
Условие

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CH. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, а в треугольник ACH — окружность радиуса r. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BCH.

Ввести ответ с точностью до $0,01$.

Решение

Положим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, x — искомый радиус.



Из подобия треугольников ACH и ABC имеем $\frac{r}{R} = \frac{b}{c}$, следовательно:

$$b = c\frac{r}{R}.$$

Из подобия треугольников BCH и ABC будет $\frac{x}{R} = \frac{a}{c}$, значит:

$$a = c\frac{x}{R}.$$

По теореме Пифагора будет $a^2 + b^2 = c^2$, то есть:

$$\left(c\frac{x}{R}\right)^2 + \left(c\frac{r}{R}\right)^2 = c^2.$$

Отсюда находим:

$$x = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
r	1	4	0,5
R	6	12	0,5

Ответ: $\sqrt{R^2 - r^2}$.

Задача II.2.3.4. (30 баллов)

Темы: алгебра, поиск шаблона.

Условие

Развозчик пиццы каждому адресату отдавал половину имеющихся пицц и ещё половину пиццы (каждый адресат получал целое число пицц). Все пиццы были розданы по k адресам. Сколько изначально пицц было у развозчика?

Решение

Пусть у разносчика n пицц.

Первому адресату он отдаст $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$ пицц. У него останется $n-\frac{n+1}{2}=\frac{n-1}{2}$ пицц.

Второму адресату он отдаст $\frac{n-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{4}$ пицц. У него останется $\frac{n-1}{2}-\frac{n+1}{4}=\frac{n-3}{4}$ пицц.

Третьему адресату он отдаст $\frac{n-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{8}$ пицц. У него останется $\frac{n-3}{4}-\frac{n+1}{8}=\frac{n-7}{8}$ пицц. И так далее.

Имеем: k-му адресату он отдаст $\frac{n+1}{2^k}$ пицц. Так как пиццы у него закончатся, то последний адресат должен получить одну пиццу, то есть: $\frac{n+1}{2^k}=1$.

Следовательно, $n=2^k-1$.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
k	10	20	1

Ответ: 2^k-1.

Вторая попытка. Задачи 10–11 класса

Задача II.2.4.1. (25 баллов)

Темы: теория вероятностей, формула полной вероятности.

Условие

В районной «математической регате» участвует n команд, причём физико-математический лицей выставил две команды. По правилам соревнований команды случайным образом разбиваются на игровые пары. В каждой паре определяется проигравшая команда, которая выбывает из турнира, и победившая, которая выходит в следующий тур. На очередном туре команды снова распределяются на пары случайным образом. В каждой встрече вероятность выигрыша и поражения для любой команды равна 0,5. Какова вероятность того, что не позднее k-го тура команды физико-математического лицея сыграют друг с другом? Ответ округлить до тысячных.

Решение

Пусть A — событие, при котором команды физико-математического лицея (назовём их «команда 1» и «команда 2») сыграют вместе не позднее k-го тура; A_1 — событие, при котором эти команды встретятся в первом туре. По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|A_1)P(A_1) + P(A|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1) = P(A_1) + P(A|\overline{A_1})(1 - P(A_1))$$

(мы воспользовались тем, что $P(A|A_1) = 1$).

Обозначим через $p_{i,j}$ вероятность события, при котором команды 1 и 2 встретились не позднее j-го тура, если всего участвует 2^i команд. Тогда формулу, полученную выше, можно записать так:

$$p_{m,k} = p_{m,1} + P(A|\overline{A_1})(1 - p_{m,1}).$$

Если заранее известно, что произошло событие $\overline{A}_1$, то события «команда 1 выиграла» и «команда 2 выиграла» независимы. Тогда вероятность выхода обеих команд во второй тур равна $0,5^2 = 0,25$. Следовательно, по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A|\overline{A_1}) = p_{m-1,k-1} \cdot 0,25 + 0 \cdot (1 - 0,25) = p_{m-1,k-1} \cdot 0,25.$$

Заметим ещё, что:

$$p_{i,1} = \frac{2^i/2}{C_{2^i}^2} = \frac{2^i}{2^i(2^i - 1)} = \frac{1}{2^i - 1}.$$

Таким образом, получаем рекуррентную формулу:

$$p_{m,k} = \frac{1}{2^m - 1} + 0,25 p_{m-1,k-1} \left(1 - \frac{1}{2^m - 1}\right).$$

Применяя последовательно это равенство, находим:

$$p_{m,k} = \frac{1}{2^m - 1} + \frac{2(2^{m-1} - 1)}{2^m - 1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{m-1} - 1} + \frac{2(2^{m-2} - 1)}{2^{m-1} - 1}\frac{1}{4}(\ldots)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^m - 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^m - 1} + \frac{1}{4}\frac{1}{2^m - 1} + \ldots = \frac{1}{2^m - 1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^m - 1}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

Погрешность 0,1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	2^m		
m	5	10	1
k	3	4	1

Ответ: $\dfrac{2}{2^m - 1}\left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$.

Задача II.2.4.2. (20 баллов)

Темы: *комбинаторика.*

Условие

В доме культуры работают 3 различные спортивные секции. Известно, что во второй секции занимается на 3 человека больше, чем в первой, и на 3 человека меньше, чем в третьей, причем спортсмены в каждой секции имеют примерно одинаковый уровень подготовки. С началом сезонных соревнований дом культуры должен каждую неделю посылать в другой район команду из 6-ти человек, в которую должен войти 1 спортсмен из первой секции, 2 спортсмена из второй и 3 спортсмена из третьей (каждый спортсмен участвует в соревнованиях в течение одного сезона один раз). Сколько всего спортсменов занимается в доме культуры, если известно, что число вариантов отбора команды на четвертой неделе равно k?

Решение

Пусть в первой секции занимается n спортсменов. Тогда во второй будет $n+3$, а в третьей $n+6$ спортсменов. На 4-й неделе команду можно составить из $n-1\cdot 3 = n-3$ участников первой секции, $n+3-2\cdot 3 = n-3$ участников второй секции и $n+6-3\cdot 3 = n-3$ участников третьей секции. Таким образом, число вариантов:

$$C_{n-3}^{1}\cdot C_{n-3}^{2}\cdot C_{n-3}^{3} = \frac{(n-3)^3(n-4)^2(n-5)}{12}.$$

Перебирая натуральные значения $n = 6, 7, \ldots$, найдём такое n, что:

$$k = \frac{(n-3)^3(n-4)^2(n-5)}{12}.$$

(Перебор существенно сократится, если рассмотреть разложение числа $12k$ на простые множители.)

Всего спортсменов, занимающихся в доме культуры, равно $n+(n+3)+(n+6) = 3n+9$.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	8	24	1

Ответ: $3n+9$, если $k = \dfrac{(n-3)^3(n-4)^2(n-5)}{12}$.

Задача II.2.4.3. (30 баллов)

Темы: *стереометрия.*

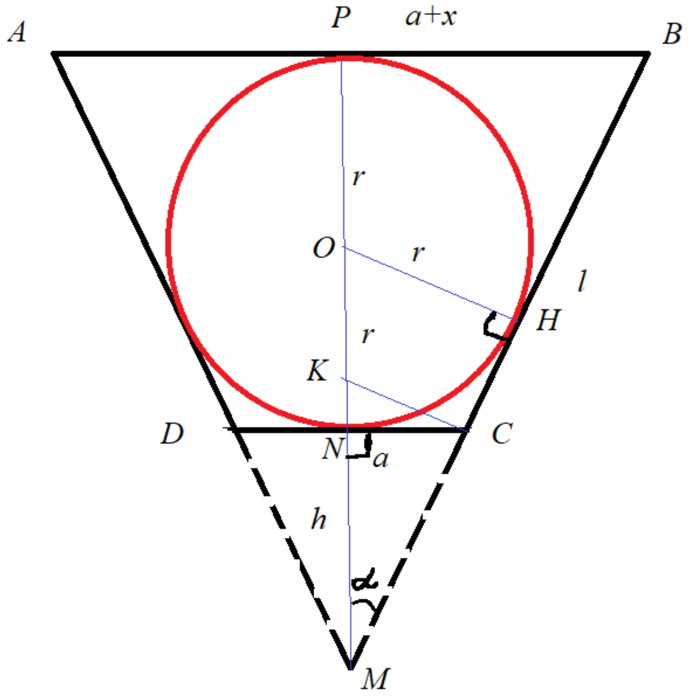
Условие

На дно сосуда с водой, имеющего форму усечённого конуса с радиусом меньшего основания a, положили шар радиуса r (дно соответствует меньшему основанию). При этом оказалось, что шар касается стенок сосуда, а уровень воды касается шара сверху. Какой будет высота столба воды, если вынуть шар?

Ввести ответ с точностью до сотых.

Решение

Пусть радиус поверхности воды равен $a+x$, длина образующей равна l. Достроим имеющийся усечённый конус до полного конуса и рассмотрим сечение полученного тела.



Отрезок AB — уровень воды, равнобедренный треугольник AMB — сечение полного конуса, равнобедренная описанная трапеция $ABCD$ — сечение исходного усечённого конуса. Имеем:

$$\begin{cases} 2l = 2a + 2(a+x), \\ l^2 = x^2 + (2r)^2. \end{cases}$$

Следовательно, $x = \frac{r^2-a^2}{a}$.

Так как треугольники MNC и MOH прямоугольные (O — центр шара), то:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{h} = \frac{r}{MH}.$$

Имеем:

$$MH^2 = MN \cdot MP = h(h+2r).$$

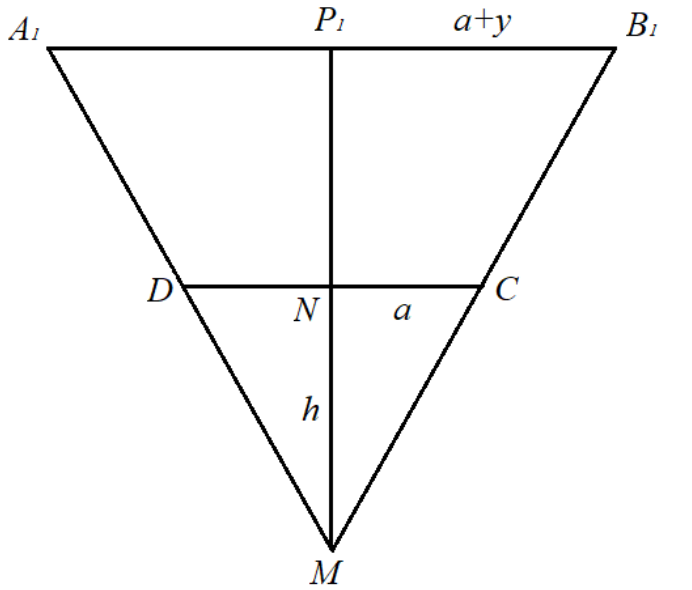
Тогда:

$$\frac{a}{h} = \frac{r}{\sqrt{h(h+2r)}}.$$

Отсюда:
$$h = \frac{2ra^2}{r^2 - a^2}.$$

Объём конуса равен:
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi(a+x)^2(h+2r) = \frac{\pi}{3}\left(a + \frac{r^2 - a^2}{a}\right)^2\left(\frac{2ra^2}{r^2-a^2} + 2r\right) = \frac{2\pi r^7}{3a^2(r^2-a^2)}.$$

После вынимания шара имеем следующую картину (A_1B_1 — уровень воды):



Положим $d = MP_1$ (высота нового конуса). Объём нового конуса равен:
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi(a+y)^2 d.$$

В то же время:
$$V_2 = V_1 - V_{\text{шара}} = V_1 - \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Значит:
$$(a+y)^2 d = \frac{3V_1}{\pi} - 4r^3.$$

Из подобия треугольников MNC и MP_1B_1 находим:
$$\frac{a}{a+y} = \frac{h}{d},$$

поэтому:
$$a + y = \frac{ad}{h}.$$

Следовательно:
$$\left(\frac{ad}{h}\right)^2 d = \frac{3V_1}{\pi} - 4r^3.$$

Подставляя найденные ранее значения h и V_1, получаем:
$$d = \frac{2r}{r^2-a^2}\left(r^6 - 2r^2a^2(r^2-a^2)\right)^{1/3}.$$

Тогда искомая величина NP_1 равна:

$$NP_1 = d - h = \frac{2r}{r^2 - a^2}\left((r^6 - 2r^4a^2 + 2r^2a^4)^{1/3} - a^2\right).$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
r	10	20	0,5
a	4	8	0,5

Ответ: $\frac{2r}{r^2 - a^2}\left((r^6 - 2r^4a^2 + 2r^2a^4)^{1/3} - a^2\right)$.

Задача II.2.4.4. (25 баллов)

Темы: *алгебра, задача на движение.*

Условие

Два друга, Миша и Петя, хотят добраться из пункта A в пункт B. Расстояние между A и B равно S км. В распоряжении ребят есть мопед, передвигающийся со скоростью u км/ч. Отправляясь из A одновременно, Миша идёт пешком, а Петя едет на мопеде до встречи с Васей, идущим из B в A. Дальше Петя идет пешком, а Вася едет на мопеде до встречи с Мишей, после чего передает ему мопед, на котором Миша и добирается до B. За сколько часов до отправления Миши и Пети Вася должен выйти из пункта B, чтобы Миша и Петя добрались до B одновременно? Все три мальчика идут со скоростью v км/ч.

Записать ответ с точностью до 0,01.

Решение

Чтобы Миша и Петя прибыли в пункт B одновременно, они должны пройти пешком одно и то же расстояние x км и проехать на мопеде одно и то же расстояние $S - x$ км. Тогда Вася до встречи с Петей должен пройти x км, и до встречи с Мишей проехать $S - 2x$ км, а затем Миша проедет $S - x$ км. Всего Вася и Миша проедут $2S - 3x$ км. За это время Петя пройдет x км.

Тогда:

$$\frac{2S - 3x}{u} = \frac{x}{v},$$

следовательно:

$$x = \frac{2Sv}{u + 3v}.$$

Петя до встречи с Васей едет $t_1 = \frac{S-x}{u}$ часов. Вася до встречи с Петей идёт $t_2 = \frac{x}{v}$ часов. Тогда Вася должен выйти за $t_2 - t_1$ часов до отправления Миши и Пети:

$$t_2 - t_1 = \frac{x}{v} - \frac{S - x}{u} = \frac{s(u - v)}{u(u + 3v)}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
S	15	30	5
v	5	7	1
u	14	35	1

Ответ: $\dfrac{s(u-v)}{u(u+3v)}$.

Третья попытка. Задачи 8–9 класса

Задача II.2.5.1. (20 баллов)

Темы: вероятность.

Условие

Участникам «математического марафона» предлагается для решения n задач, k из которых — задачи повышенной сложности. Задачи решаются по одной в случайном порядке. Участник получает следующую задачу лишь после того, как решил предыдущую. Решив задачу повышенной сложности, участник переходит на следующий уровень. Найти вероятность того, что для выхода на следующий уровень участнику придётся решить не менее пяти задач. Ответ округлить до сотых.

Решение

Если до выхода на следующий уровень участник решил не менее пяти задач, то первые четыре задачи не имели повышенной сложности, а сложность последующих задач не имеет значения. С учётом порядка всего имеется $n(n-1)(n-2)(n-3)$ способов выбрать первые четыре задачи, и $(n-k)(n-1-k)(n-2-k)(n-3-k)$ способов сделать первые четыре задачи простыми. Поэтому искомая вероятность равна:

$$p = \frac{(n-k)(n-1-k)(n-2-k)(n-3-k)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	10	15	1
k	3	6	1

Ответ: $\dfrac{(n-k)(n-1-k)(n-2-k)(n-3-k)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

Задача II.2.5.2. (25 баллов)

Темы: комбинаторика.

Условие

В танцевальном кружке занимаются m девочек и n мальчиков, которые показывают примерно одинаковые результаты. В отборочных соревнованиях от кружка должны выступать k пар (каждой паре присваивается номер). Сколько существует вариантов составить пары?

Решение

Всего существует C_m^k способов выбрать группу девочек и C_n^k способов выбрать группу мальчиков, которые будут участвовать в соревнованиях. Далее каждому мальчику определим в пару девочку, это можно сделать $k!$ способами. Наконец, нужно присвоить номера парам. Для этого есть $k!$ способов. Итого имеем:

$$C_m^k \cdot C_n^k \cdot k! \cdot k! = \frac{m!n!}{(m-k)!(n-k)!}$$

способов составить пары.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	7	10	1
m	6	7	1
k	3	5	1

Ответ: $\dfrac{m!n!}{(m-k)!(n-k)!}$.

Задача II.2.5.3. (30 баллов)

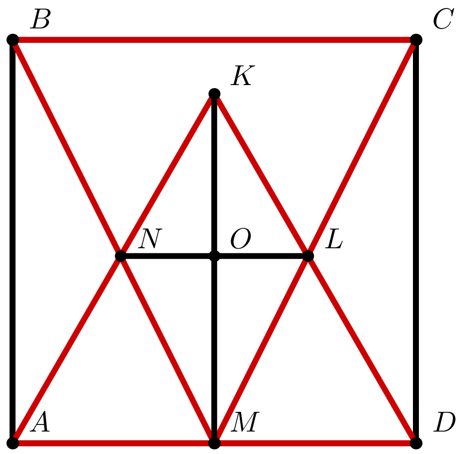
Темы: планиметрия, площадь.

Условие

Точка K лежит внутри квадрата $ABCD$ со стороной a так, что треугольник AKD равносторонний. Точка M делит отрезок AD пополам. Найти площадь фигуры, образованной пересечением треугольников AKD и BCM.

Ввести ответ с точностью до 0,01.

Решение



Пусть $N = BM \cap KA$, $L = CM \cap KD$, $O = NL \cap KM$. Ясно, что $KM \perp NL$. Поэтому площадь фигуры $NKLM$

$$S = S_{NKL} + S_{NML} = \frac{1}{2}KO \cdot NL + \frac{1}{2}OM \cdot NL = \frac{1}{2}KM \cdot NL.$$

Пусть $b = a/2$. По теореме Пифагора из треугольника MKD находим:

$$KM = \sqrt{(2b)^2 - b^2} = b\sqrt{3}.$$

Треугольники ABN и MNK подобны с коэффициентом подобия:

$$k = \frac{2b}{b\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $AN = k \cdot NK$. Поэтому:

$$2b = AK = AN + NK = k \cdot NK + NK = (k+1)NK.$$

Отсюда

$$NK = \frac{2b\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Треугольник NKL равносторонний, значит, $NL = NK$. Имеем:

$$S = \frac{1}{2}KM \cdot NL = \frac{1}{2} \cdot b\sqrt{3} \cdot \frac{2b\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{3b^2}{2+\sqrt{3}} = \frac{3a^2}{4(2+\sqrt{3})}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
a	2	40	4

Ответ: $\dfrac{3a^2}{4(2+\sqrt{3})}$.

Задача II.2.5.4. (25 баллов)

Темы: алгебра, задача на работу.

Условие

Петя, Вася и Иван участвуют в хакатоне по программированию. Если Петя и Вася работают вместе, то их производительности увеличиваются на 10% и 20% соответственно, и они могут написать программу, решающую предложенную задачу, за n часов. Иван же предпочитает индивидуальную работу, поэтому его производительность при совместной работе с Петей падает на 5%, а производительность Пети при таком взаимодействии возрастает на 6%. При совместной работе Ивана и Васи производительность Ивана падает на 15%, а производительность Васи возрастает на 14%. Петя и Иван, работая совместно, могут написать ту же программу за m часов, а Вася и Иван — за k часов. Сколько часов потратят все три мальчика, работая совместно, на написание этой программы, если при таком варианте сотрудничества производительность Пети возрастёт на 8%, Васи — на 17%, а Ивана — уменьшится на 10%? Ответ округлить до сотых.

Решение

Пусть x — производительность Пети, y — производительность Васи, z — производительность Ивана. Принимая за единицу объём работы, необходимый для решения задачи хакатона, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1,1x + 1,2y = \frac{1}{n}, \\ 1,06x + 0,95z = \frac{1}{m}, \\ 1,14y + 0,85z = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Складывая все уравнения, имеем:

$$2,16x + 2,34y + 1,8z = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k}.$$

Искомое время:

$$t = \frac{1}{1,08x + 1,17y + 0,9z} = \frac{2}{1/n + 1/m + 1/k}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	4	7	1
m	5	8	1
k	6	9	1

Ответ: $\dfrac{2}{1/n + 1/m + 1/k}$.

Третья попытка. Задачи 10–11 класса

Задача II.2.6.1. (25 баллов)

Темы: вероятность, формула Байеса.

Условие

Участникам многопрофильной командной олимпиады предлагаются задачи по трём предметам: математика, информатика и физика. Модуль по математике содержит m задач, k из которых повышенной сложности. Модуль по информатике — n задач, среди которых l повышенной сложности. Модуль по физике — p задач, среди которых r повышенной сложности. Команды получают по три задачи, выбирая из каждого модуля случайно одну задачу. Участники команды π полученные задачи распределили между собой с помощью жеребьёвки, при этом оказалось, что Андрею выпала задача повышенной сложности. Определить вероятность того, что Андрей решает задачу по математике. Ответ округлить до сотых.

Решение

Пусть событие A — Андрею выпала задача повышенной сложности. Определим гипотезы, образующие полную группу событий: H_1 — Андерею выпала задача по математике, H_2 — по информатике, H_3 — по физике. Тогда при $i = 1, 2, 3$:

$$P(H_i) = \frac{1}{3}, \quad P(A|H_1) = \frac{k}{m}, \quad P(A|H_2) = \frac{l}{n}, \quad P(A|H_3) = \frac{r}{p}.$$

По формуле Байеса искомая вероятность равна:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{k/m}{k/m + l/n + r/p}$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
m	8	10	1
k	4	5	1
n	6	8	1
l	3	4	1
p	7	9	1
r	3	4	1

Ответ: $\dfrac{k/m}{k/m + l/n + r/p}$.

Задача II.2.6.2. (20 баллов)

Темы: *комбинаторика.*

Условие

Сколько различных комбинаций можно составить из n различных цифр, наименьшая из которых в комбинации повторяется ровно k раз, а остальные по одному разу, и первых m букв латинского алфавита, если все цифры должны стоять рядом, а буква «c» должна стоять непосредственно перед буквой «a»?

Решение

Последовательно выбираем:

1. позиции для повторяющейся цифры относительно других цифр — C_{n-1+k}^{k} способов;
2. порядок неповторяющихся цифр — $(n-1)!$ способов;
3. порядок букв — $(m-1)!$ способов (поскольку буква «c» стоит непосредственно перед буквой «a», то можно считать, что у нас имеется $m-1$ буква);
4. положение группы цифр относительно букв — m способов.

Таким образом, всего имеется:

$$C_{n-1+k}^{k}(n-1)!(m-1)!m = \frac{(n-1+k)!m!}{k!}$$

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	3	5	1
k	3	5	1
m	5	9	1

Ответ: $\dfrac{(n-1+k)!m!}{k!}$.

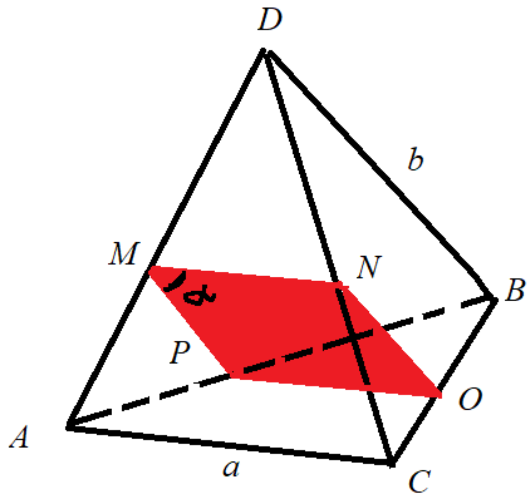
Задача II.2.6.3. (30 баллов)

Темы: *стереометрия.*

Условие

В тетраэдре $ABCD$ среди сечений, параллельных рёбрам AC и BD одновременно, выбрано сечение с наибольшей площадью. Длина ребра AC равна a, длина ребра BD равна b. Найти сумму квадратов диагоналей этого сечения с точностью до 0,1.

Решение



Пусть $PMNO$ — секущая плоскость. Имеем:

1. $AC, PO \subset ABC$, $AC \parallel MNP \Rightarrow PO \parallel AC$.
2. $BD, NO \subset DBC$, $BD \parallel MNP \Rightarrow NO \parallel BD$.
3. Аналогично, $MN \parallel AC$, $MP \parallel BD$.
4. Из пунктов 1, 2 и 3 следует, что противоположные стороны четырёхугольника $MNOP$ параллельны, а значит, $MNOP$ — параллелограмм.
5. Треугольники PBO и ABC подобны с коэффициентом подобия k. Тогда $PO = MN = ka$.
6. Треугольники APM и ABD подобны с коэффициентом подобия $1-k$. Тогда $MP = NO = (1-k)b$.
7. Угол между прямыми AC и BD равен углу между прямыми MP и MN, обозначим его через α. Площадь сечения равна:
$$S = MP \cdot MN \cdot \sin\alpha = ab\sin\alpha \cdot k(1-k).$$
Отсюда получаем, что площадь сечения максимальна при $k = 1/2$.
8. Стороны сечения равны $PO = MN = \frac{a}{2}$, $MP = NO = \frac{b}{2}$.
9. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:
$$MO^2 + NP^2 = 2(MP^2 + MN^2) = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
a	4	10	0,5
b	11	20	0,5

Ответ: $\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Задача II.2.6.4. (25 баллов)

Темы: алгебра, функциональное уравнение.

Условие

Найти значение $f(1)$ для функции f, удовлетворяющей при всех $x \neq a$ уравнению:

$$f(x) + k \cdot f\left(\frac{ax+b}{x-a}\right) = nx.$$

Записать ответ с точностью до 0,01.

Решение

Если $y = \frac{ax+b}{x-a}$, то $x = \frac{ay+b}{y-a}$. Тогда, подставляя вместо x в уравнении значение y, находим:

$$f\left(\frac{ax+b}{x-a}\right) + kf(x) = n \cdot \frac{ax+b}{x-a}.$$

Положим $A = f(x)$, $B = f\left(\frac{ax+b}{x-a}\right)$. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} A + kB = nx, \\ B + kA = n \cdot \frac{ax+b}{x-a}. \end{cases}$$

Решая её относительно переменных A и B, находим:

$$A = \frac{n(-x^2 + ax(k+1) + kb)}{(x-a)(k^2-1)}.$$

Следовательно:

$$f(1) = \frac{n(a(k+1) + kb - 1)}{(1-a)(k^2-1)}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
a	10	40	10
b	1	10	1
k	0,1	0,9	0,1
n	5	9	1

Ответ: $\frac{n(a(k+1) + kb - 1)}{(1-a)(k^2-1)}$.

Четвертая попытка. Задачи 8–9 класса

Задача II.2.7.1. (25 баллов)

Темы: вероятность.

Условие

Участникам олимпиады предлагается для решения n задач. Вася может решить каждую из задач с вероятностью p. Найти вероятность того, что Вася решит не более одной задачи. Ответ округлить до сотых.

Решение

Вероятность того, что Вася не решит ни одной задачи:

$$p_0 = (1-p)^n.$$

Вероятность того, что Вася решит ровно одну задачу:

$$p_1 = np(1-p)^{n-1}.$$

Значит, вероятность того, что Вася решит не более одной задачи:

$$p_{0,1} = p_0 + p_1 = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	10	15	1
p	0,1	0,4	0,1

Ответ: $(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$.

Задача II.2.7.2. (20 баллов)

Темы: комбинаторика.

Условие

На спортивные соревнования из другого района приехало n школьников. В гостинице на этот момент оказались свободными только один двухместный номер, один трёхместный номер и один четырёхместный номер. Остальных школьников решили разместить в спортзале местной школы. Руководитель должен составить список на расселение. Сколько возможно вариантов такого списка, если порядок записанных в один номер гостиницы (или в спортзал) не важен?

Решение

Последовательно выбираем спортсменов:

1. в двухместный номер — C_n^2 способов;
2. в трёхместный номер — C_{n-2}^3 способов;
3. в четырёхместный номер — C_{n-5}^4 способов;
4. в спортзал разместятся все остальные спортсмены — 1 способ.

Таким образом, общее число вариантов:

$$C_n^2 C_{n-2}^3 C_{n-5}^4 = \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{(n-2)!}{3!(n-5)!}\frac{(n-5)!}{4!(n-9)!} = \frac{n!}{288\cdot(n-9)!}.$$

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	14	25	1

Ответ: $\dfrac{n!}{288\cdot(n-9)!}$.

Задача II.2.7.3. (25 баллов)

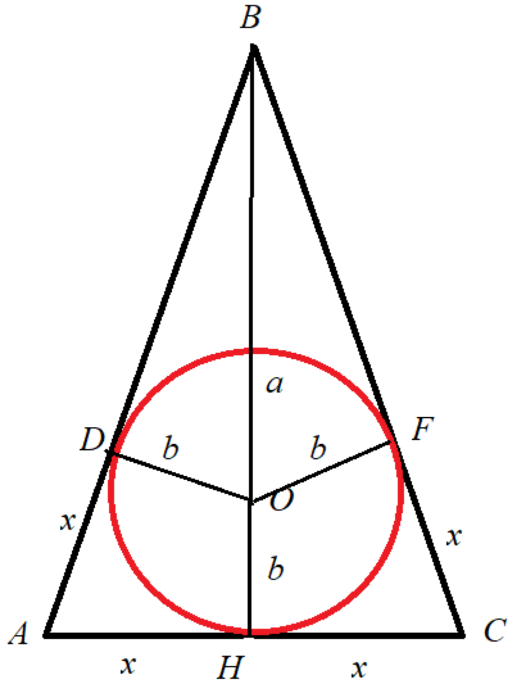
Темы: *планиметрия.*

Условие

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписана окружность с центром в точке O. Точка O делит высоту BH на отрезки длиной a и b, считая от точки B. Найти периметр треугольника ABC.

Ввести ответ с точностью до 0,01.

Решение



Пусть D и F — точки касания окружности с боковыми сторонами треугольника, x — длина AH. Тогда $AD = AH = CH = CF = x$.

Из треугольника OBD по теореме Пифагора получаем $BD^2 = a^2 - b^2$. Следовательно, в треугольнике ABH: $(\sqrt{a^2 - b^2} + x)^2 = (a + b)^2 + x^2$.

Отсюда $x = b\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

Периметр треугольника ABC равен:

$$4x + 2\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{2(a+b)^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
a	10	20	1
b	2	9	1

Ответ: $\frac{2(a+b)^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Задача II.2.7.4. (30 баллов)

Темы: <u>*алгебра, поиск шаблона.*</u>

Условие

Петя приехал на курорт на k дней, имея на банковской карте целое число тысяч рублей. Каждый день он тратил половину имеющихся денег и еще 500 рублей, причём остаток на его счете в конце дня всегда делился на тысячу нацело. В последний день были потрачены все деньги. Сколько изначально рублей было у Пети?

Решение

Пусть у Пети n тыс. руб.

В первый день он потратил $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$ тыс. руб. У него осталось $n-\frac{n+1}{2}=\frac{n-1}{2}$ тыс. руб.

Во второй день он потратил $\frac{n-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{4}$ тыс. руб. У него осталось $\frac{n-1}{2}-\frac{n+1}{4}=\frac{n-3}{4}$ тыс. руб.

В третий день он потратил $\frac{n-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{8}$ тыс. руб. У него осталось $\frac{n-3}{4}-\frac{n+1}{8}=\frac{n-7}{8}$ тыс. руб.

И так далее: в j-ый день он потратит $\frac{n+1}{2^j}$ тыс. руб.

В последний день он потратит одну тыс. руб., то есть:

$$\frac{n+1}{2^k}=1.$$

Поэтому $n=2^k-1$. Тогда всего рублей $1000(2^k-1)$.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
k	6	15	1

Ответ: $n=1000(2^k-1)$.

Четвертая попытка. Задачи 10–11 класса

Задача II.2.8.1. (25 баллов)

Темы: теория вероятностей.

Условие

В районной «математической регате» участвует 2^m команд, причём физико-математический лицей выставил две команды. По правилам соревнований в каждом туре команды случайным образом разбиваются на игровые пары. В каждой паре определяется проигравшая команда, которая выбывает из турнира, и победившая, которая выходит в следующий тур. В каждой встрече вероятность выигрыша и поражения для любой команды равна 0,5. Какова вероятность того, что команды физико-математического лицея сыграют друг с другом в k-м туре?

Ответ округлить до тысячных.

Решение

Пусть событие A_k — команды физико-математического лицея встретились на k-м туре; событие B_k — команды физико-математического лицея прошли в k-й тур. Имеем следующую цепочку вложений:

$$\overline{A}_1 \supset B_2\overline{A}_2 \supset B_3\overline{A}_3 \supset \ldots \supset B_{k-1}\overline{A}_{k-1} \supset B_k \supset A_k,$$

поэтому

$$A_k = \overline{A}_1 B_2 \overline{A}_2 B_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{k-1} B_k A_k.$$

По формуле для вероятности произведения получаем:

$$P(A_k) = P(\overline{A}_1)P(B_2|\overline{A}_1)P(\overline{A_2}|\overline{A}_1 B_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k|\overline{A}_1 B_2 \overline{A}_2 B_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{k-1} B_k)$$

Последовательно находим:

$$\begin{aligned}
&P(\overline{A}_1) = 1 - \frac{2^m/2}{C^2_{2^m}} = \frac{2(2^{m-1}-1)}{2^m-1},\\
&P(B_2|\overline{A_1}) = 0,5 \cdot 0,5 = \frac{1}{4},\\
&P(\overline{A_2}|\overline{A}_1 B_2) = \frac{2(2^{m-2}-1)}{2^{m-1}-1} \quad \text{(вычисляется аналогично } P(\overline{A}_1)),\\
&P(B_3|\overline{A}_1 B_2 \overline{A}_2) = 0,5 \cdot 0,5 = \frac{1}{4},\\
&\ldots\\
&P(\overline{A}_{k-1}|\overline{A}_1 B_2 \overline{A}_2 B_3 \cdot \ldots \cdot B_{k-1}) = \frac{2(2^{m-(k-1)}-1)}{2^{m-(k-1)+1}-1},\\
&P(B_k|\overline{A}_1 B_2 \overline{A}_2 B_3 \cdot \ldots \cdot B_{k-1}\overline{A}_{k-1}) = 0,5 \cdot 0,5 = \frac{1}{4},\\
&P(A_k|\overline{A}_1 B_2 \overline{A}_2 B_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{k-1} B_k) = \frac{2^{m+1-k}/2}{C^2_{2^{m+1-k}}} = \frac{1}{2^{m+1-k}-1}
\end{aligned}$$

Перемножая полученные значения, получаем:

$$\begin{aligned}
P(A_k) &= \frac{2(2^{m-1}-1)}{2^m-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2(2^{m-2}-1)}{2^{m-1}-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2(2^{m-(k-1)}-1)}{2^{m-(k-1)+1}-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{m+1-k}-1}\\
&= \frac{1}{2^{k-1}(2^m-1)}.
\end{aligned}$$

Погрешность 0,1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
m	5	7	1
k	3	5	1

Ответ: $\dfrac{1}{2^{k-1}(2^m-1)}$.

Задача II.2.8.2. (20 баллов)

Темы: *комбинаторика, сочетания с повторениями.*

Условие

Команде из k горнолыжников перед соревнованием на новой трассе предоставляется возможность совершить n тренировочных спусков. Тренер должен указать, сколько тренировочных спусков предоставляется каждому спортсмену его команды. Сколько существует вариантов такого распределения, если известно, что каждый спортсмен должен совершить не менее m тренировочных спусков?

Решение

Предоставив m тренировочных спусков каждому спортсмену, останется распределить $n-km$ спусков. Это схема выбора $j=n-km$ предметов из $l=k$ без упорядочения и с повторениями. Количество всевозможных таких наборов — число сочетаний с повторениями:

$$\overline{C}_l^j = C_{l+j-1}^j.$$

Подставляя значения l и j, находим:

$$\overline{C}_k^{n-km} = C_{k+n-km-1}^{n-km} = \frac{(k+n-km-1)!}{(n-km)!(k-1)!}.$$

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
n	60	100	1
k	4	7	1
m	5	7	1

Ответ: $\dfrac{(k+n-km-1)!}{(n-km)!(k-1)!}$.

Задача II.2.8.3. (30 баллов)

Темы: *стереометрия.*

Условие

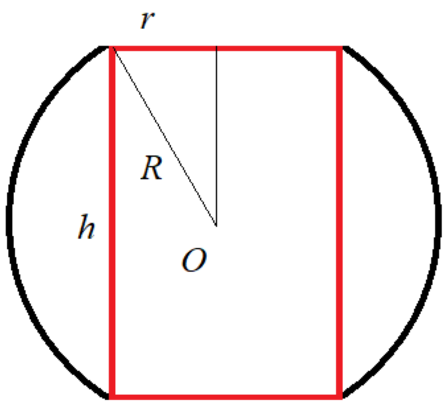
В деревянном шаре радиуса R плотности ρ_1 просверлили сквозное цилиндрическое отверстие (ось цилиндра проходит через центр шара) и заполнили образовавшуюся полость металлическим сплавом плотности ρ_2. Каков наибольший радиус этого отверстия, при котором полученное тело не утонет в жидкости плотности ρ_3?

Примечание: плотность тела — это отношение массы тела к его объёму. Из закона Архимеда следует, что тело не тонет, если его плотность не превосходит плотности жидкости.

Записать ответ с точностью до 0,01.

Решение

Пусть r — искомый радиус цилиндра, h — высота цилиндра. Изобразим сечение полученного тела плоскостью, проходящей через ось цилиндра.



Плотность полученного тела, имеющего массу M и объём V, равна:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{V_1\rho_1 + V_2\rho_2}{V_1 + V_2},$$

где V_1 — объём деревянной части, V_2 — металлической.

Объём цилиндра равен:

$$V_2 = h \cdot \pi r^2.$$

Для нахождения объёма деревянной части вычтем из шарового слоя объём цилиндра:

$$V_1 = V_{\text{шар. сл.}} - V_2 = \pi h(r^2 + h^2/6) - h\pi r^2 = \frac{\pi h^3}{6}.$$

Условие, при котором тело не тонет, имеет вид $\rho \leqslant \rho_3$, то есть:

$$\frac{\frac{\pi h^3}{6}\rho_1 + h\pi r^2\rho_2}{\pi h(r^2 + h^2/6)} \leqslant \rho_3,$$

что равносильно:

$$r^2(\rho_2 - \rho_3) \leqslant \frac{h^2}{6}(\rho_3 - \rho_1).$$

Подставляя $h^2 = 4(R^2 - r^2)$ (из теоремы Пифагора), после несложных преобразований приходим к неравенству:

$$r \leqslant R\sqrt{\frac{2(\rho_3 - \rho_1)}{3\rho_2 - \rho_3 - 2\rho_1}}.$$

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
R	2	10	1
ρ_1	0,5	0,9	0,1
ρ_2	7	12	1
ρ_3	1	4	0,5

Ответ: $R\sqrt{\dfrac{2(\rho_3-\rho_1)}{3\rho_2-\rho_3-2\rho_1}}$.

Задача II.2.8.4. (25 баллов)

Темы: алгебра, функциональное уравнение.

Условие

Дима и Лёша хотят попасть из пункта A в пункт B. Расстояние между A и B равно S км. В распоряжении ребят есть скейтборд, скорость передвижения на котором равна u км/ч. Отправляясь одновременно, Дима идёт пешком, а Лёша едет на скейтборде до встречи с Пашей, который вышел из B в A за t часов до отправления Димы и Лёши. Дальше Лёша идёт пешком, а Паша едет на скейтборде до встречи с Димой, после чего передаёт ему скейтборд, на котором тот и добирается до B. Известно, что Дима и Лёша добрались до B одновременно. Чему равна скорость ходьбы мальчиков (в км/ч), если известно, что она у всех одинаковая?

Записать ответ с точностью до 0,01.

Решение

Пусть скорость мальчиков равна v км/ч. Чтобы Дима и Лёша прибыли в пункт B одновременно, они должны пройти пешком одно и то же расстояние x км и проехать на скейтборде одно и то же расстояние $S-x$ км. Тогда Паша до встречи с Лёшей должен пройти x км, и до встречи с Димой проехать $S-2x$ км, а затем Дима проедет $S-x$ км. Всего Паша и Дима проедут $2S-3x$ км. За это время Лёша пройдёт x км.

Тогда:

$$\frac{2S-3x}{u}=\frac{x}{v}.$$

Лёша до встречи с Пашей едет $\frac{S-x}{u}$ часов. Паша до встречи с Лёшей идёт $\frac{x}{v}$ часов.

Тогда:

$$\frac{x}{v}-\frac{S-x}{u}=t.$$

Из системы:

$$\begin{cases}\frac{2S-3x}{u}=\frac{x}{v},\\ \frac{x}{v}-\frac{S-x}{u}=t\end{cases}$$

находим $v=\dfrac{u(S-ut)}{S+3ut}$.

Погрешность 1%.

Диапазоны

Величина	min	max	Шаг
S	30	40	5
u	10	12	1
t	0,25	0,75	0,25

Ответ: $\dfrac{u(S-ut)}{S+3ut}$.

Инженерный тур

Задачи по компетенциям «Математика»

Задача II.3.1.1. (7 баллов)

Темы: числа, сравнение, логика.

Условие

Кредит на полгода в банке ВТБ дешевле кредита в Райффайзенбанке на 5 месяцев, но дороже кредита на 10 месяцев в Россельхозбанке. Что дороже — кредит на 2 месяца в банке ВТБ или на 3 месяца в Россельхозбанке? В случае выбора банка ВТБ в ответ ввести 1, в случае выбора Россельхозбанка — 2.

Решение

Здесь есть лишнее условие (о Райффайзенбанке). Поскольку кредит на полгода в банке ВТБ дороже кредита на 10 месяцев в Россельхозбанке (6 ВТБ $>$ 10 Россельхозбанк), то тем более, кредит на полгода в банке ВТБ дороже кредита на **9** месяцев в Россельхозбанке (6 ВТБ $>$ 9 Россельхозбанк). Разделив обе части последнего неравенства на 3, получим, что кредит на 2 месяца в банке ВТБ дороже кредита на 3 месяца в Россельхозбанке.

Ответ: 1.

Задача II.3.1.2. (11 баллов)

Темы: комбинаторика, вероятность.

Условие

Известно пять шаблонов, применяемых в схемах финансового мошенничества. Стандартная схема состоит из двух или трех шаблонов, используемых в определенном порядке. Какова вероятность определить, какую мошенническую схему использует организация «Пирамидка» с третьей попытки?

Решение

Общее количество схем:

$$A_5^3 + A_5^2 = 60 + 20 = 80.$$

Искомая вероятность находится из условия, что первая и вторая попытки были неверны:

$$P(A) = 79/80 \cdot 78/79 \cdot 1/78 = 1/80.$$

В случае, если ответ — нецелое число, введите обыкновенную дробь по форме m/n.

Ответ: 1/80.

Задача II.3.1.3. (7 баллов)

Темы: делимость чисел.

Условие

Банк ВТБ предлагает депозиты на срок от трех месяцев до двух лет. Известно, что срок депозита Ивана в банке ВТБ составляет некоторое количество дней, которое можно записать только с помощью цифры 4. Срок депозита Натальи (также в днях) в том же банке можно записать только с помощью цифры 3. Сколько раз (в сумме) Наталья и Иван должны пролонгировать свой депозит, чтобы закрыть счета в банке в один и тот же день?

Решение

Согласно условию следует найти число, составленное только из четверок, и число, составленное только из троек. Дополнительным условием является ограничение по срокам: от трех месяцев до двух лет. То есть число дней в каждом депозите будет от 90 до 730. Отсюда сразу получаем сроки для Ивана и Натальи: 444 и 333 дня соответственно. Далее, $444 = 4 \cdot 3 \cdot 37, 333 = 9 \cdot 37$. Поэтому Ивану следует три раза пролонгировать депозит, а Наталье — четыре. В сумме — 7.

Ответ: 7.

Задача II.3.1.4. (11 баллов)

Темы: неравенства, системы неравенств.

Условие

Известно, что не менее 31% ценных бумаг в портфеле инвестора — это облигации и более 65% — акции. Определить наименьшее возможное количество ценных бумаг в портфеле, если известно, что облигаций не менее 8.

Решение

Пусть количество облигаций в портфеле — это x, а количество акций — y. Тогда, согласно условию, получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y} \geqslant 0,31 \\ \dfrac{y}{x+y} \geqslant 0,65 \\ x \geqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{0,69x - 0,31y}{x+y} \geqslant 0 \\ \dfrac{0,65x - 0,35y}{x+y} \geqslant 0 \\ x \geqslant 8 \end{cases}.$$

Поскольку $x + y \geqslant 0$, систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{65}{31}x < y < \frac{69}{31}x \\ x \geqslant 8 \end{cases}.$$

При $x = 8$ имеем:

$$\frac{65}{31} \cdot 8 < y < \frac{69}{31} \cdot 8 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x + y = 23.$$

Ответ: 23.

Задача II.3.1.5. (7 баллов)

Темы: условная вероятность, умножение вероятностей.

Условие

В кредитный отдел банка на проверку поступают заявки о предоставлении кредитов компаниям, 10 процентов которых имеют низкий кредитный рейтинг. При проверке заявки компания, действительно имеющая низкий кредитный рейтинг, выявляется с вероятностью 0,95. И с вероятностью 0,03 кредитоспособной компании может быть присвоен низкий кредитный рейтинг. Проверили заявку компании «Оникс» на кредит в сумме 10 млн рублей. Определить размер страховой премии для компании «Оникс». Страховая премия для кредита размером S вычисляется из условия: $(P(A)/2) \cdot S$, где $P(A)$ вероятность невыплаты кредита. Ответ указать в млн рублей.

Решение

В решении используем формулу полной вероятности события.

Пусть $A = \{$заявке компании присвоен низкий рейтинг$\}$. Выделим две гипотезы $H_1 = \{$компания действительно с низким кредитным рейтингом$\}$, $P(H_1) = 0,1$. И вторая гипотеза $H_2 = \{$кредитоспособная компания$\}$, $P(H_2) = 0,9$.

Пусть $A|H_1 = \{$компании действительно с низким кредитным рейтингом присвоен низкий рейтинг$\}$, $P(A|H_1) = 0,95$. И $A|H_2 = \{$компании присвоен низкий рейтинг, при том, что компания кредитоспособна$\}$, $P(A|H_2) = 0,03$.

Откуда $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,1 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,03 = 0,122$. То есть страховая премия компании «Оникс» $P(A)/2 \cdot 10 = 0,61$ млн рублей.

Ответ: 0,61.

Задача II.3.1.6. (7 баллов)

Темы: вероятность.

Условие

Клиент инвестиционной платформы банка «Тинькофф» забыл три последние цифры пятизначного пароля от входа в онлайн-приложение. Определить вероятность того, что клиент введет верный пароль с первой попытки, если известно, что пользователь платформы помнит, что среди цифр нет нуля, одна больше пяти, одна меньше пяти и последняя цифра или 8 или 2. Ответ записать в виде обыкновенной дроби m/n.

Решение

Количество цифр больших пяти четыре, это $\{6; 7; 8; 9\}$, количество цифр, которые меньше пяти без нуля, тоже четыре $\{1; 2; 3; 4\}$. Посчитаем количество возможных комбинаций трех забытых цифр, если на первом месте стоит цифра из первого набора $\{6; 7; 8; 9\}$, а на втором месте стоит цифра из второго набора $\{1; 2; 3; 4\}$ и третья цифра, например 8, тогда количество равно 16, если поменять первый и второй наборы местами возможных комбинаций также 16, итого по правилу суммы их 32. И теперь учтем, что на последнем месте может стоять двойка, поэтому число возможных комбинаций удвоиться и станет равным 64. Учтем, что первый и второй наборы не повторяются, поэтому число правильных комбинаций равно одному. Вычислим вероятность по определению, получим 1/64.

Ответ: 1/64.

Задачи по компетенциям «Информатика»

Задача II.3.2.1. Решение линейных уравнений в различных системах счисления (10 баллов)

Темы: основы систем счисления.

Условие

Производители консалтинг B2B-услуг в ООО «СтрахованиеКонсалт» определились с минимальной и максимальной ценами на свои продукты и рассматривают в качестве основных потребителей две компании: ООО «ТрансКредит» и ООО «ЭксклюзивФинанс». Максимальная цена, по которой компания «ТрансКредит» готова покупать продуктовые услуги у консалтинговой компании «СтрахованиеКонсалт» описывается уравнением: $443x{+}323x = 1066x$, где X — основание системы счисления. Максимальная цена, по которой компания «ЭксклюзивФинанс» готова покупать продуктовые консалтинговые услуги у компании «СтрахованиеКонсалт», описывается уравнением $113x + 323x = 441x$, где X — основание системы счисления. Решив уравнения и исходя из уровня максимальных цен для каждой из компаний-потребителей, необходимо предположить с какой из компаний ООО «СтрахованиеКонсалт» заключит договор об оказании услуг?

Решение

Для нахождения максимально возможной цены для каждой из компаний-потребителей, по которой они готовы приобретать услуги у компании «СтрахованиеКонсалт», следует:

1. преобразовать каждое число в уравнениях максимальных цен из системы счисления X в десятичную систему счисления;
2. составить систему уравнений отдельно для каждой из компаний;
3. решить составленную систему уравнений;
4. получить либо единственное решение, либо множество решений, либо сделать вывод об отсутствии каких-либо решений в целых числах. При этом надо понимать, что основанием (т. е. решением системы) не может быть целое число, меньшее максимальных значений цифр в первоначальном представлении системы.

Первое уравнение: $443x + 323x = 1066x$.

$(4 \cdot x^2 + 4 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0) + (3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0) = 1 \cdot x3 + 0x^2 + 6 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0$.

$4x^2 + 4x + 3 + 3x^2 + 2x + 3 = x3 + 6x + 6$.

$7x^2 + 6x + 6 = x3 + 6x + 6$.

$7x^2 + 6x + 6 - x3 - 6x - 6 = 0$.

$7x^2 - x3 = 0$.

$7 - x = 0$.

$x = 7$ у. е. — максимальная цена, по которой компания «ТрансКредит» готова покупать продуктовые услуги у консалтинговой компании «СтрахованиеКонсалт».

Второе уравнение: $113x + 323x = 441x$.

$(1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0) + (3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0) = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0$.

$x2 + x + 3 + 3x2 + 2x + 3 = 4x2 + 4x + 1$.

$4x2 + 3x + 6 = 4x2 + 4x + 1$.

$4x2 + 3x + 6 - 4x2 - 4x - 1 = 0$.

$5 - x = 0$.

$x = 5$ у. е. — максимальная цена, по которой компания «ЭксклюзивФинанс» готова покупать продуктовые услуги у консалтинговой компании «СтрахованиеКонсалт».

Ответ: исходя из полученных значений максимальных цен в у. е., компания «СтрахованиеКонсалт» заключит торговое соглашение с компанией «ТрансКредит».

Задача II.3.2.2. Выполнение арифметических действий и сравнение результатов в различных системах счисления (10 баллов)

Темы: системы счисления и операции с ними, перевод целых и дробных чисел в другую систему счисления, двоичная система счисления, арифметические операции, сложение и вычитание степеней числа 2, восьмеричная система счисления, шестнадцатеричная система счисления, связь с двоичной системой счисления.

Условие

Клиент П* воспользовался выгодными предложениями по вкладам на рынке банковских услуг, и открыл два срочных накопительных счёта в «ЦентралБанке» и два депозитных счёта на такие же суммы в «АлетБанке». По истечении сроков действия вкладов накопительная сумма по вкладам в «ЦентралБанке» составила $A12816+$ $+500010$, а в «АлетБанке» сумма по вкладам получилась равной $A1C916+5318$. Исходя из подсчётов полученных итоговых сумм по вкладам, определить банк, который оказался более выгодным для клиента П*. Расчёт сумм по вкладам произвести в двоичной системе счисления, а результат записать и оценить полученную банковскую выгоду в 16-ричной системе счисления.

Решение

Одним из способов решения задач подобно типа является приведение чисел к единой системе счисления и дальнейшее выполнение необходимых операций.

1. Переведем оба числа первой суммы в двоичную систему счисления:
   $A12816 = 1010000100101000$,
   $500010 = 1001110001000$.
2. Просуммируем эти два числа:
   $1010000100101000 + 1001110001000 = 1011010010110000$.
3. Приведем полученное число в 16-ричную систему счисления: $B4B016$.
4. Переведем оба числа второй суммы в двоичную систему счисления:
   $A1C916 = 1010000111001001$,
   $5318 = 101011001$.
5. Просуммируем эти два числа:
   $1010000111001001 + 101011001 = 1010001100100010$.
6. Приведем полученное значение суммы в 16-ричную систему счисления: $A32216$.

Ответ: исходя из полученных значений сумм по банковским вкладам в 16-ричной системе счисления: $B4B016$ и $A32216$, банк «ЦентралБанк» выгоднее для клиента П* с точки зрения предоставляемых банковских услуг.

Задача II.3.2.3. Представление информации в банковских транзакциях (10 баллов)

Темы: кодирование информации, знание и понимание побитной и/или побайтной записи.

Условие

Типичная банковская транзакция, которая определяется банком-поставщиком финансовой услуги при инициализации платежа и записи в криптограмму банковской карты, включает в себя 400 символов (цифры и буквы латинского алфавита). Символы транзакции шифруются в блоке шифрования перед записью в криптограмму банковской карты на участке рабочей строки длиной 10 символов и сдвигаются на 1 символ влево каждые 100 мегабайт в секунду. Исходно считаем рабочую строку шифровального блока пустой, а началом шифрования транзакции банка будем считать момент появления первого символа транзакции на крайнем правом месте в рабочей строке блока шифрования. По прошествии времени S этот символ сдвинется на одно место в рабочей строке влево, а на его месте отобразится второй символ транзакции. Каждое время S имеющиеся символы транзакции сдвигаются на одно место рабочей строки влево, а на освободившемся крайнем правом месте появляется новый символ, пока не зашифруются все символы транзакции. Если шифрование транзакции завершено, то при очередном сдвиге крайнее правое место рабочей строки шифровального блока становится пустым, через время S пустыми окажутся два места в конце рабочей строки и так далее, пока вся рабочая строка шифровального блока не станет пустой. Этот момент будем считать завершением процесса шифрования транзакции. Банковская транзакция хранится в памяти как последовательность нулей и единиц, а все символы транзакции шифруются одинаковым и минимально возможным количеством бит. Для хранения банковской транзакции в автономной памяти шифровального блока отведено X байт. Известно, что максимальная продолжительность шифрования транзакционного сообщения с момента появления первого символа до момента исчезновения последнего символа составляет 10^{-6} секунд. Другими словами, самый большой фрагмент транзакции, который может поместиться в автономной памяти шифровального блока, будет зашифрован за 10^{-6} секунд. Определить объём автономной памяти шифровального блока в байтах.

Решение

Сначала определим скорость шифрования одного символа и какой фрагмент транзакции в символах может быть может быть зашифрован за 10^{-6} секунды. Скорость шифрования одного символа, по сути, нам известна и составляет 10^{-8} секунды. Время, которое потребуется для записи в память первого символа транзакции (с момента появления его на крайнем правом месте рабочей строки до момента его нахождения на крайнем левом месте рабочей строки шифровального блока) требуется 10^{-7} секунды. Очевидно, что за 10^{-6} секунды можно зашифровать более 1 символа. Каждые 10^{-8} секунды в области рабочей строки шифровального блока будет появляться новый символ, пока рабочая строка не будет заполнена. Время, необходимое для того, чтобы полностью заполненная рабочая строка (10 символов, новых символов не будет) опустела, равно также 10^{-7} секунды. Таким образом, $10^{-7}+10^{-7} = 20^{-7}$ секунды необходимо на заполнение и очистку рабочей строки, а остальные $10^{-6} - 20^{-7} = 80^{-7}$ секунды будут использованы на появление новых символов в рабочей строке шифровального блока, а точнее $80^{-7}/10^{-8} = 80$ символов. То есть всего в сообщении будет $10 + 80 = 90$ символов. На показ одного символа требуется 8 бит, соответственно, автономная память шифровального блока будет равна $8 \cdot 90 = 720$ бит $= 90$ байт.

Ответ: 90 байт (90 символов в транзакции).

Задача II.3.2.4. Доход от инвестиций (10 баллов)

Темы: работа с циклами условиями, использование условного и циклического оператор.

Условие

У вас неожиданно появились свободные деньги, и вы решили их выгодно вложить. Увы, за свою жизнь вы убедились, что для ведения собственного бизнеса у вас нет способностей, и вы решили вложить деньги в надёжные инвестиционные проекты.

Вы рассмотрели представленные заявки и выбрали N проектов, в которые можно вложить свои деньги без риска их потерять. Объём инвестиций в i-й проект ($1 \leqslant i \leqslant N$) составляет D_i, а доход, который вы рассчитываете получить после реализации этого проекта, равен T_i. Максимальный объём ваших инвестиций равен M.

К сожалению, все выбранные проекты начинаются одновременно, так что доход, полученный от одного проекта, инвестировать в другой нельзя... Кроме того, инвестировать в один проект более одного раза запрещается. Требуется определить максимальный доход, который вы сможете получить после реализации всех проектов, в которые вы вложили деньги.

Известно, что количество проектов 2, Доходность от одного проекта составляет 10%, инвестиции 100 рублей. Для второго проекта доходность равна 12%, сумма инвестиций равна 100 рублей, общий инвестиционный срок 3 года.

Формат входных данных

Первая строка содержит величины N и M ($1 \leqslant N \leqslant 1000$, $1 \leqslant M \leqslant 10^9$).

Далее следуют N строк, описывающих каждый проект и содержащих величины D_i и T_i ($1 \leqslant D_i \leqslant 10^6$, $D_i < T_i \leqslant D_i + 100$).

Формат выходных данных

Выведите единственное число — максимальную сумму полученного вами дохода (с учётом сделанных инвестиций).

Решение

Данная задача является примером классической задачи упаковки рюкзака. Необходимо собрать набор предметов (проектов, в которые предполагается вложиться) наибольшей суммарной стоимости (получить наибольший доход). Классический подход к решению этой задачи предполагает составление рекуррентного соотношения $F(W, i)$ — наибольшая суммарная ценность предметов, которую можно получить, выбрав предметы суммарным весом W из первых i вариантов предметов. В нашем случае такой метод не подходит, т. к. разрешенный суммарный вес слишком велик — до 1 миллиарда. Однако можно заметить, что возможная прибыль любого из проектов $T_i - D_i \leqslant 100$.

В этой задаче предполагается «перевернуть» задачу о рюкзаке. Составим рекуррентное соотношение, которое позволит минимизировать суммарные вложения, для достижения суммарной прибыли P:

$$G(P, i) = \min(G(P, i-1), G(P - (T_i - D_i), i-1) + D_i).$$

Первая часть нашего соотношения $G(P, i-1)$ фактически обозначает «в i-й проект не инвестируем», а вторая часть $G(P - (T_i - D_i), i-1) + D_i$ означает «в i-й проект инвестируем».

Для инициализации значений динамического программирования можно использовать $G(P, i) = \infty$ и $G(0, 0) = 0$, т. е. получить нулевую прибыль можно и без инвестиций. Ответом на задачу будет максимальное значение $M + P$ при условии, что $G(P, N) \leqslant M$.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```python
n = int(0)
while True:
    n = int(input('Введите количество проектов от 1 до 10: '))
    if n >= 1 and n <= 10:
        break
    else:
        print("Неверно введено количество")
doxod = []
invest_money = []
time = 0
project = 0
while project < n:
    print('Для проекта №',project)
    while True:
        d = int(input('Введите доходность от 0 до 100 %: '  ))
        if d >= 0 and d <= 100:
            doxod.append(d)
            break
        else:
            print("Неверно введено количество")
    while True:
        i = float(input('Введите инвестиции от 0 до 100 рублей: '  ))
        if i >= 0 and i <= 100:
            invest_money.append(i)
            break
        else:
            print("Неверно введено количество")
    project += 1
while True:
    time = int(input('Введите инвестиционный срок от 0 до 100 лет: '  ))
    if time >= 0 and time <= 100:
        break
    else:
        print("Неверно введено количество")
invest_init = invest_money.copy()
god = 0
while god < time:
    project = 0
    while project < n:
        invest_money[project] += invest_money[project] * doxod[project] / 100
        project += 1
    god += 1
project = 0
while project < n:
    invest_money[project] -= invest_init[project]
    project += 1
summ = 0
for od in invest_money:
    summ += od
print('Доход по проектам ',invest_money,"рублей")
print('Доход общий ', summ, "рублей")
```

Ответ: общий доход от двух проектов составляет 73,6 рублей.

Задача II.3.2.5. Тарифный план (10 баллов)

Темы: основы программирования на языке Python.

Условие

Компании по продаже автомобилей необходимо приложение, которое будет рассчитывать сумму отчислений при растаможивании автомобиля. Для расчета используется несколько параметров: возраст авто, объем двигателя и цена.

Цена учитывается только в случае, если авто моложе 3-х лет.

Тарифы, которые необходимо учитывать при расчете.

Возраст	**Цена**	**Ставка**
Новый (от года выпуска прошло не более 2-х лет)	До 8500 евро	2,5 евро за 1 см^3
	8500 до 16 700 евро	2,5 евро за 1 см^3
	16 700 до 42 300 евро	5,5 евро за 1 см^3
	42 300 до 85 500 евро	7,5 евро за 1 см^3
	84 500 до 169 000 евро	15 евро за 1 см^3
	Свыше 169 000 евро	Не менее 20 евро за 1 см^3
Возраст	**Объем двигателя**	**Ставка**
Автомобиль от 3-х до 5-ти лет	Не более 1000 см^3	1,5 евро за 1 см^3
	1000–1500 см^3	1,7 евро за 1 см^3
	1500–1800 см^3	2,5 евро за 1 см^3
	1800–2300 см^3	2,7 евро за 1 см^3
	2300–3000 см^3	3 евро за 1 см^3
	Более 3000 см^3	3,6 евро за 1 см^3

Разработать приложение, которое позволяло бы по значению параметров рассчитывать величину таможенных отчислений, где:

1. возраст меньше 2-х лет, а цена машины 50000 рублей;
2. возраст больше 2-х лет, объем двигателя 2400 см^3.

Формат входных данных

Первая строка содержит величины N и M ($1 \leqslant N \leqslant 1000$, $1 \leqslant M \leqslant 10^9$).

Далее следуют N строк, описывающих каждый проект и содержащих величины D_i и T_i ($1 \leqslant D_i \leqslant 10^6$, $D_i < T_i \leqslant D_i + 100$).

Формат выходных данных

Выведите единственное число — максимальную сумму полученного вами дохода (с учётом сделанных инвестиций).

Решение

Для решения данной задачи необходимо посчитать чему будет равна цена при разных ставках, с условием, что для новых машин не более 2-х лет будет использоваться показатель цены, а для машин более 3-х лет будет использоваться показатель объема двигателя. Решением будет умножение цены на ставку в случае, если возраст машины меньше 2-х лет. В случае, если возраст машины превышает 2 года, необходимо умножать объем двигателя на нужную ставку ставку.

Исходя из этого следует, что первое условие, где возраст машины составляет меньше 2-х лет, а цена 50000 рублей, будет рассчитываться как умножение цены в размере 50000 рублей на ставку 7,5 евро за 1 см^3.

Во втором случае мы знаем объем двигателя, 2400 см^3 умножаем на 3 евро за 1 см^3.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python 3.

```
age_auto = 2
engine_o = 1400
value = 50000
if age_auto < 3:
    if value <= 8500:
        result_calc = value * 2.5
    elif value <= 16700:
        result_calc = value * 2.5
    elif value <= 42300:
        result_calc = value * 5.5
    elif value <= 84500:
        result_calc = value * 7.5
    elif value <= 169000:
        result_calc = value * 15
    else:
        result_calc = value * 20
elif age_auto >= 3 and age_auto < 5:
    if engine_o <= 1000:
        result_calc = engine_o * 1.5
    elif engine_o <= 1500:
        result_calc = engine_o * 1.7
    elif engine_o <= 1800:
        result_calc = engine_o * 2.5
    elif engine_o <= 2300:
        result_calc = engine_o * 2.7
    elif engine_o <= 3000:
        result_calc = engine_o * 3
    else:
        result_calc = engine_o * 3.6

print ('Таможенные отчисления на ваш автомобиль составят =', result_calc)
```

Ответ:

1. таможенные отчисления на ваш автомобиль составят 375000 рублей;
2. таможенные отчисления на ваш автомобиль составят 4200 рублей.