10 класс

1. На каждой странице книги написан её номер. Нумерация страниц начинается с единицы. Вася вырвал из книги все чётные по счёту листы (на каждом листе книги по две страницы). Номера оставшихся в книге страниц все вместе содержат ровно 845 цифр. Сколько страниц могло быть в книге изначально? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет. (20 баллов)

Решение: Среди каждых четырёх подряд идущих страниц остались две с номерами, имеющими остатки 1 и 2 при делении на 4. Остались страницы с однозначными номерами $1, 2, 5, 6, 9$, двузначными номерами $10, 13, 14, 17, \dots, 97, 98$ и сколько-то трёхзначных номеров $101, 102, 105, 106, \dots$. Среди первых 100 страниц осталось ровно половина, пять из которых – однозначные, а значит двузначных страниц осталось 45. На нумерацию оставшихся страниц до сотни потребовалось $5 + 45 \cdot 2 = 95$ цифр, значит на трёхзначные номера потребовалось 750 цифр, итого всего трёхзначных номеров осталось $750 : 3 = 250$. В каждой четвёрке номеров осталось ровно два трёхзначных номера, значит последние два оставшихся номера будут в 125 по счёту четвёрке – это номера $101 + 124 \times 4 = 597$ и $102 + 124 \times 4 = 598$. Следующие две страницы могли быть вырваны, и тогда всего страниц было 600, а могли быть не вырваны, и тогда страниц было 598.

Ответ: 598 и 600

2. На бумаге отметили 25 точек – центры клеток квадрата 5×5. Точки покрашены в несколько цветов. Известно, что ни на одной прямой (вертикальной, горизонтальной, или идущей под любым наклоном) нет трёх точек одинакового цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано? (20 баллов)

Решение: Если использовано не больше двух цветов, то, в частности, в первой строке найдутся хотя бы три точки одного цвета – они лежат на одной прямой. Пример использования трёх цветов (одинаковыми цифрами обозначены точки, покрашенные в один цвет):

1	2	2	3	3
2	3	1	3	2
3	3	2	1	2
1	1	3	2	3
2	2	3	1	1

Ответ: 3 цвета

3. Назовём натуральное число *особенным*, если в нём можно поменять одну цифру на другую так, чтобы в полученном числе все цифры были различными. Числа, в которых все цифры различны, тоже считаются особенными. Сколько существует особенных десятизначных чисел? (20 баллов)

Решение: Разобьём числа на группы:

1) Числа, в которых все цифры различны – всего их $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9 \cdot 9!$.
2) Числа, в которых совпадают две ненулевые цифры, не стоящие в старшем разряде. Всего таких цифр 9, пар разрядов, на которых могут стоять эти цифры – $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, остальные цифры можно расставить в оставшиеся 8 разрядов $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 8 \cdot 8!$ способами. Итого таких чисел $36 \cdot 8 \cdot 9!$.
3) Числа, в которых совпадают две нулевые цифры. Всего пар разрядов, на которых могут стоять эти цифры – $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, остальные цифры можно расставить в оставшиеся 8 разрядов $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9!$ способами. Итого таких чисел $36 \cdot 9!$.

4) Числа, в которых совпадают две ненулевые цифры, и одна из них стоит в старшем разряде. Всего таких цифр 9, пар разрядов, на которых могут стоять эти цифры – 9, остальные цифры можно расставить в оставшиеся 8 разрядов $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9!$ способами. Итого таких чисел $81 \cdot 9!$.

Итого особенных чисел всего $(9 + 36 \cdot 8 + 36 + 81) \cdot 9! = 414 \cdot 9!$.

Ответ: $\mathbf{414 \cdot 9!}$

4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \\ b^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \\ c^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d}, \\ d^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{cases}$$ (20 баллов)

Решение: Рассмотрим первые два уравнения системы и вычтем из первого второе:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{b} - \frac{1}{a},$$

и преобразуем полученное равенство к виду

$$(a - b)\left(a + b - \frac{1}{ab}\right) = 0.$$

Получается, что если $a \neq b$, то $ab(a + b) = 1$. Аналогичные равенства можно записать для любых двух не равных друг другу чисел.

Предположим, что среди значений переменных a, b, c, d хотя бы три разных. Без ограничения общности, пусть $a \neq b \neq c$. Тогда

$$ab(a + b) = ac(a + c)$$

$$b^2 + ab = c^2 + ac$$

$$(b - c)(a + b + c) = 0.$$

Так как $b \neq c$, получим $a + b + c = 0$. Подставим $-a = b + c$ в первое уравнение с учётом того, что $bc(b + c) = 1$:

$$a^2 = \frac{b + c}{bc} + \frac{1}{d} = (b + c)^2 + \frac{1}{d} = a^2 + \frac{1}{d},$$

что невозможно. Значит среди переменных не больше двух различных значений.

Рассмотрим несколько случаев:

1) $a = b = c = d$. Тогда $a^2 = \frac{3}{a}$, из чего $a = b = c = d = \sqrt[3]{3}$.

2) Какие-то три числа равны, а третье им не равно. Без ограничения общности, пусть $a = b = c \neq d$ (остальные случаи разбираются аналогично). Тогда система будет равносильна системе

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{d} \\ d^2 = \dfrac{3}{a} \end{cases}.$$

Выразив a из второго уравнения и подставив в условие $ad(a + d) = 1$, получим

$$\frac{3}{d}\left(\frac{3}{d^2} + d\right) = 1,$$

$$\frac{9}{d^3} = -2,$$

$$d = -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}.$$

В таком случае $a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. Проверим, что полученная пара чисел удовлетворяет первому уравнению системы. Действительно,

$$\sqrt[3]{\frac{16}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1}.$$

Последнее равенство верно, значит $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, d = -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ будет решением исходной системы.

3) Пара чисел принимает одно значение, а другая пара чисел – другое. Без ограничения общности, пусть $a = b, c = d$. Тогда исходная система будет равносильна системе

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{c} \\ c^2 = \dfrac{1}{c} + \dfrac{2}{a} \end{cases}.$$

Так как $a \neq c$, имеем дополнительно условие $ac(a + c) = 1$. Первое уравнение запишем в виде $a^2 = \frac{c+2a}{ac} = (a + c)(2a + c) = 2a^2 + 3ac + c^2$, откуда $a^2 + 3ac + c^2 = 0$, $(a + c)^2 + ac = 0$, $\frac{1}{(ac)^2} = -ac$, $(ac)^3 = -1$, $ac = -1$, и значит $a + c = -1$. Заметим, что выполнив ту же подстановку во второе уравнение системы, мы получим те же условия на a и c. Если последние два условия выполняются, то $ac = a(-1 - a) = -1$, то есть $a^2 + a - 1 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ – один из них равен a, а другой равен c.

Ответ: $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$; $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)$; $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)$; $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)$; $\left(-\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

5. Существует ли выпуклый многоугольник, не имеющий центра симметрии, который можно разрезать на два выпуклых многоугольника, каждый из которых имеет центр симметрии? (20 баллов)

Решение: Предположим, что такой многоугольник существует. Проведём некоторый разрез, делящий его на два выпуклых многоугольника. Если линия разреза не является отрезком, то на ней найдутся три точки A, B, C, образующие треугольник (см. рисунок 1). Оба многоугольника, в силу выпуклости,

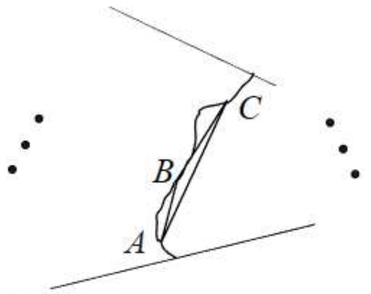

Рис.1. Пример разреза

содержат на своей границе вершины треугольника ABC, значит он целиком должен лежать в обоих многоугольниках, что невозможно, а следовательно, линия разреза может быть только отрезком. Пусть отрезок XY – линия разреза. Ясно, что точки X, Y лежат на сторонах исходного многоугольника. Пусть разрез делит многоугольник на два, центры симметрии которых обозначим через O_1, O_2 (см. рисунок 2). Отрезок XY является стороной обоих многоугольников и при симметрии переходит в

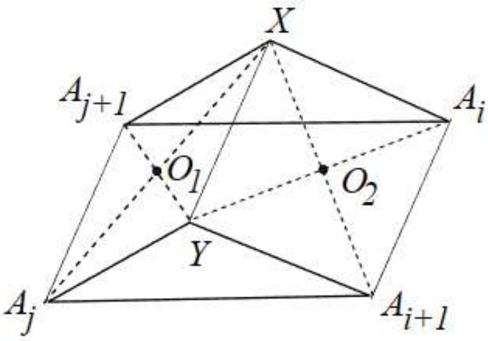

Рис.2. Разбиение многоугольника на две части

стороны исходного многоугольника – назовём их A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1}. Четырёхугольники $XA_iA_{i+1}Y$ и $YA_jA_{j+1}X$ – параллелограммы. Если точки A_i, X, A_{j+1} не лежат на одной прямой, то точки A_j, Y, A_{i+1} тоже не лежат на одной прямой, и тогда равны углы A_iXA_{j+1} и A_jYA_{i+1} в треугольниках A_iXA_{j+1} и A_jYA_{i+1}. Но тогда один из внутренних углов исходного многоугольника больше $180°$, что противоречит его выпуклости. Следовательно, точки A_i, X, A_{j+1} лежат на одной прямой, точки A_j, Y, A_{i+1} лежат на одной прямой, а также $A_iA_{i+1} = XY = A_jA_{j+1}$, то есть $A_iA_{i+1}A_jA_{j+1}$ – параллелограмм.

Из построения разреза следует, что вершин исходного многоугольника вне параллелограмма в полуплоскости относительно прямой A_iA_{i+1}, отличной от той, что содержит отрезок XY, быть не может. Аналогично с прямой A_jA_{j+1}. Если помимо вершин $A_i, A_{i+1}, A_j, A_{j+1}$ есть ещё какая-то вершина исходного многоугольника внутри параллелограмма, то пусть, без ограничения общности, это вершина между A_{j+1} и A_i – назовём её A_k. А если есть ещё какая-то вершина вне параллелограмма, то пусть, без ограничения общности, это вершина между A_{i+1} и A_j – назовём её A_m (см. рисунок 3). Но в первом случае отрезок XA_i будет лежать вне многоугольника, а во втором – отрезок A_mA_{i+1} будет лежать вне многоугольника. Следовательно, исходный многоугольник является параллелограммом, что противоречит условию, так как у него есть центр симметрии.

Ответ: не существует

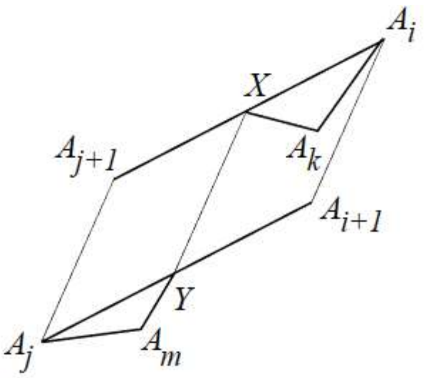

Рис.3. Разрез параллелограмма

Критерии оценки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
При верном в целом решении допущена арифметическая при подсчете общего числа страниц	18 баллов
Верное рассуждение, но на последнем шаге вычтен не 1 лист, а 1 страница	18 баллов
При верном в целом решении допущена ошибка при подсчёте последней пары невырванных страниц, в следствие чего получены неверные на 1-2 листа ответы	18 баллов
При описании случая, когда последний лист вырван, не учтено, что номера 600 и 599 уходят из подсчёта одновременно	18 баллов
Верный ответ получен в листах, а не в страницах	15 баллов
При верном ходе решения неверно посчитано количество страниц с 1-100 (ошибка не арифметическая)	5 баллов
Рассмотрены два случая с чётным и нечётным количеством листов, но подсчёт не верен	3 балла
Верно подсчитано число цифр на оставшихся страницах с 1 по 100	2 балла
Потерян один из случаев (последний лист вырван)	- 5 баллов
При подсчете страниц, автор считает, что лист 99-100 не вырван	- 5 баллов
В следствие арифметической ошибки неверно подсчитано количество цифр в первой сотне оставшихся страниц или в первой сотне с трёхзначными номерами	-5 баллов
При верном ходе решения подсчёт страниц до 100 не приведён, при этом получен верный ответ	- 3 балла
При верном ходе решения подсчёт страниц не доведён до конца	- 3 балла
Участник путает понятия “цифра” и “число”	0 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 2

Верный пример на 3 цвета с доказательством, что меньше нельзя	20 баллов
Только пример на 3 цвета без оценки	10 баллов
Верная оценка без примера	5 баллов
Пример на 4 и более цветов	0 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Верно подсчитано количество особенных чисел, в которых совпадают две ненулевые цифры	15 баллов
При верном в целом решении допущена логическая ошибка при подсчете количества особенных чисел, содержащих ровно один ноль	15 баллов
При верном в целом решении допущена логическая ошибка при подсчете количества особенных чисел, в которых совпадают первые две цифры	15 баллов
Ошибочно поделено на 2 количество особенных чисел, не содержащих нуля, в следствие чего получен неверный ответ. В остальном решение верное	15 баллов
Упущен случай подсчета особенных чисел, которые можно получить заменой нуля на первую цифру	12 баллов
Верный ход подсчёта количества особенных чисел, у которых совпадают две цифры не старшего разряда, но в нём допущена арифметическая ошибка	10 баллов
Верно найдено количество чисел, у которых все цифры различны и подсчитано количество остальных, получаемых заменой одной цифры; при этом не учтено, что некоторые особенные числа могут быть получены из двух разных	7 баллов
Верно подсчитано количество особенных чисел, в которых совпадают две нулевые цифры	5 баллов
Верно подсчитано количество «особенных» чисел, у которых одна из совпадающих цифр – последняя	2 балла
Подсчитано только количество десятизначных чисел с различными цифрами	0 баллов
Неверный ход подсчёта или отсутствие решения	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Доказано, что среди чисел a, b, c, d есть хотя бы два равных	5 баллов
Разобран случай, когда $a = b = c = d$	3 балла
Арифметическая ошибка	-1 балл
При верном в целом решении получены неверные четверки корней $a = b$ и $c = d$ и симметричные им	-5 баллов
Отсутствие решения	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Верное решение опирается на необоснованный факт того, что разрез может быть только отрезков	15 баллов
Доказано, что разрез может быть только отрезком и что у исходного многоугольника стороны попарно параллельны	5 баллов
Дан только ответ	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов