11 класс

1. Дарья Дмитриевна готовит зачёт по теории чисел. Она пообещала каждому студенту дать столько задач, сколько слагаемых он создаст в числовом примере

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2021,$$

где все числа a_i – натуральные, больше 10 и являются палиндромами (не меняются, если их цифры записать в обратном порядке). Если студент не нашёл ни одного такого примера, он получит на зачёте 2021 задачу. Какое наименьшее количество задач может получить студент? (20 баллов)

Решение: Одну задачу студент получить не может, так как 2021 не является палиндромом. Предположим, что он может получить две задачи, тогда хотя бы одно из чисел a_1, a_2 – четырёхзначное. Если оно начинается на 2, то вторая цифра 0 и само число равно 2002. В таком случае второе число равно 19, что не палиндром. Если же число начинается с 1, то его последняя цифра также 1 и у второго числа последняя цифра должна быть нулём, что неверно для палиндромов. Значит две задачи студент получить не мог. Пример на 3 задачи существует, например, $1111 + 888 + 22 = 2021$.

Ответ: 3

2. Существует ли многоугольник, не имеющий центра симметрии, который можно разрезать на два выпуклых многоугольника, каждый из которых имеет центр симметрии? (20 баллов)

Решение: Существует. Пример.

Центрами симметрии прямоугольников являются точки пересечения их диагоналей. Данный многоугольник не имеет центра симметрии, так как если он лежит вне синего отрезка, проходящего через середину одной из сторон, левые вершины многоугольника перейдут не в точки многоугольника, а если он лежит вне красного отрезка, проходящего через середину другой стороны, то верхние вершины многоугольника перейдут не в точки многоугольника.

Ответ: существует

3. Положительные числа a, b, c, d таковы, что числа a^2, b^2, c^2, d^2 в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию и числа $\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a = b = c = d$. (20 баллов)

Решение: Запишем характеристическое свойство для каждой арифметической прогрессии:

$$a^2 + c^2 = 2b^2;\ (1)$$

$$b^2 + d^2 = 2c^2;\ (2)$$

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+c+d} = \frac{2}{a+b+d}.\ (3)$$

Преобразуем уравнение (3):

$$(a+b+d)(a+c+d) + (a+b+c)(a+b+d) = 2(a+b+c)(a+c+d);$$

$$2a^2 + b^2 + d^2 + 3ab + 2ac + 3ad + 2bc + 2bd + 2cd = 2a^2 + 2c^2 + 2ab + 4ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd;$$

$$b^2 + d^2 + ab + ad = 2c^2 + 2ac.$$

Воспользовавшись равенством (2), получим

$$ab + ad = 2ac,$$

при этом $a > 0$, значит $b + d = 2c$. Подставим в равенство (2) и получим

$$b^2 + d^2 = 2\left(\frac{b+d}{2}\right)^2;$$

$$2(b^2 + d^2) = b^2 + 2bd + d^2;$$

$$(b-d)^2 = 0,$$

из чего $b = d$. Но $2c = b + d = 2b$, откуда $b = c = d$.

Подставим полученные равенства в уравнение (1):

$$a^2 + b^2 = 2b^2,$$

из чего $a = b$, что и требовалось доказать.

4. Найдите количество троек натуральных чисел m, n, k, являющихся решением уравнения $m + \sqrt{n + \sqrt{k}} = 2023$. (20 баллов)

Решение: Чтобы левая часть была целым числом, числа k и $n + \sqrt{k}$ должны быть точными квадратами, при этом $n + \sqrt{k} \geq 2$, значит $\sqrt{n + \sqrt{k}} \geq 2$ и отсюда $m \leq 2021$. Так как $1 \leq m \leq 2021$, то $\sqrt{n + \sqrt{k}}$ может принимать любое значение от 2 до 2022 – по этому значению число m определяется однозначно. Пусть $k = x^2$ и $n + \sqrt{k} = y^2$, где $1 \leq x \leq y^2 - 1$ и $2 \leq y \leq 2022$, тогда число n определяется однозначно, а именно $n = y^2 - x$. Получается необходимо посчитать число допустимых пар (x, y). Всего их $(2^2-1)+\ldots+(2022^2-1)=1^2+2^2+\ldots+2022^2-2022$. Формула суммы квадратов первых n натуральных чисел известна:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Применим эту формулу и получим $1^2+2^2+\ldots+2022^2-2022=\frac{2022\cdot 2023\cdot 4045}{6}-2022=27575680773$.

Ответ: 27575680773

5. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя в каждую клетку таблицы 8×8 записывает число от 1 до 64, используя каждое по одному разу. После этого Вася выбирает одну из клеток и ставит на эту клетку ладью. Затем он выбирает вторую клетку, на которую можно переместиться одним ходом ладьи из первой клетки, и перемещает ладью на эту клетку. Далее он выбирает третью клетку, на которую можно переместиться одним ходом ладьи из второй клетки, и перемещает ладью на эту клетку. Выбирать ранее посещённые клетки запрещено. После этого Вася складывает все три числа, записанных в клетках, на которых стояла ладья. Какую максимальную сумму гарантированно может получить Вася не зависимо от того, каким способом Петя заполнит таблицу? (Ладья может перемещаться на любое количество клеток по горизонтали или вертикали) (20 баллов)

Решение: Докажем вспомогательную лемму.

Лемма: а) На доске 8×8 выбраны 11 произвольных клеток. Тогда среди них можно найти три клетки такие, что от одной их них можно двумя ходами ладьи обойти вторую и третью клетки.

б) На доске, суммарное числом столбцов и строк которой не более 11, выбраны 8 клеток. Тогда среди них можно найти три клетки такие, что от одной их них можно двумя ходами ладьи обойти вторую и третью клетки.

Доказательство леммы: Если в столбце/строке выбрана одна клетка, будем называть её одиночной, а если две – будем называть каждую из двух клеток парной. Будем говорить, что клетка занимает строку/столбец, если она стоит в этой строке/столбце. Заметим, что никакие другие клетки не могут быть выбраны в столбце/строке, где стоит одиночная или парная клетки. Тогда каждая пара клеток занимает суммарно 3 строки и столбца, а каждая одиночная – 1 строку и 1 столбец.

а) Обозначим число одиночных клеток за x, а число парных клеток – за $2y$. Если лемма не выполняется, то нельзя 11 клетками занять более 8 строк и 8 столбцов, то есть 16 в сумме. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x+3y\leq 16 \end{cases}.$$

Но $2x+3y=1{,}5(x+2y)+0{,}5x=16{,}5+0{,}5x>16$ – противоречие. Следовательно, предположение неверно и пункт а) леммы доказан.

б) Аналогично пункту а) леммы обозначим число одиночных клеток за x, а число парных клеток за – $2y$. Если лемма не выполняется, то нельзя 8 клетками занять более 11 строк и столбцов в сумме. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + 3y \leq 11 \end{cases}.$$

Но $2x + 3y = 1{,}5(x + 2y) + 0{,}5x = 12 + 0{,}5x > 11$ – противоречие. Следовательно, предположение неверно и пункт б) леммы доказан.

Вернёмся к решению задачи. Рассмотрим 11 клеток с числами от 54 до 64. Из пункта а) леммы следует, что какие-то три из них второй игрок может обойти, придерживаясь условий задачи. Минимальная сумма трёх из этих чисел равна

$54 + 55 + 56 = 165$, значит второй игрок всегда может получить сумму не менее 165. Предположим, что сумму больше 165 не всегда удастся получить. Тогда никакие три из клеток с числами от 54 до 64 помимо $54, 55, 56$ не должны оказаться в одной строке/столбце или образовывать “угол” (см. рисунок 1).

При этом числа $54, 55, 56$ обязаны оказаться в одной строке/столбце или образовывать “угол”, иначе найдётся другая тройка чисел с большей суммой. Если эти числа располагаются в одной строке/столбце, или образуют “угол”, то занимают суммарно 4 строки и столбца. Без ограничения общности, пусть эти числа стоят так, как показано на рисунке 2, ведь если поменять какие-то строки/столбцы местами, искомая сумма не изменится.

И в том, и в другом случае оставшиеся 8 клеток с числами от 57 до 64 располагаются в выделенных прямоугольниках, количество строк и столбцов в которых суммарно равно 12. Если эти 8 клеток занимают не все строки или столбцы, то они занимают суммарно не более 11 строк и столбцов. Тогда из пункта б) леммы следует, что какие-то три числа стоят в одной строке/столбце или образуют “угол”, а значит выбрав эти три клетки, мы увеличим искомую сумму. Если эти 8 клеток, среди которых x одиночных и 2y парных клеток, занимают все строки и столбцы, то имеем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases},$$

откуда $x = 0, y = 4$. Следовательно, все клетки в выделенном прямоугольнике парные. Тогда найдётся число не менее 52 (на второй таблице число 53 может дополнять серые клетки до квадрата), которое стоит в одной строке или в одном столбце с какой-то парной клеткой из выделенного прямоугольника. Взяв это число и две парные клетки, получим сумму не менее $52 + 57 + 58 = 167$. Значит примера, гарантирующего сумму 165, но не гарантирующего сумму 166, не существует.

Пример, гарантирующий сумму 166, но не гарантирующий сумму 167:

Здесь сумма 166 достигается, например, на числах $54, 55, 57$. Все остальные суммы в пределах правого нижнего прямоугольника 34 не превосходят 166. В серых клетках в произвольном порядке можно поставить числа от 37 до 46, тогда максимальная сумма в пределах правого нижнего прямоугольника 46 не будет превосходить 166, так как $60 + 59 + 46 = 165$. Оставшиеся числа можно ставить в любые из оставшихся клеток, так как максимальная ещё не рассмотренная сумма будет равна $64 + 63 + 36 = 163$.

Ответ: 166

Критерии оценки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Верный пример без оценки	7 баллов
Доказано, что 2021 нельзя представить в виде суммы двух трёхзначных палиндромов	7 баллов
Доказано, что 2021 нельзя представить в виде суммы двух палиндромов, один из которых четырёхзначный	7 баллов
Примеры составления числа 2021 из четырёх и более палиндромов	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 2

Верный пример с указанием центров симметрии полученных фигур	20 баллов
Неверный пример или пример, который может быть как верным, так и неверным, но без указания центров симметрии фигур это невозможно понять	0 баллов
Попытки доказательства отсутствия примера	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
При верном в целом решении потерян случай равенства каких-то двух переменных	15 баллов
Получено одно из равенств $ab + ad = 2ac, b + d = 2c, ab(a + b) = cd(c + d)$ или симметричные им	5 баллов
Проверено, что $a = b = c = d$ удовлетворяет условию задачи	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Замечено, но не доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$, и при этом получена формула $1^2 + 2^2 + \ldots + 2022^2 - 2022$, доведённая до верного ответа в замкнутой форме	16 баллов
Доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$, и при этом получена формула $1^2 + 2^2 + \ldots + 2022^2 - 2022$	15 баллов
Доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$, но итоговая формула подсчёта вариантов выписана неверно	12 баллов
Замечено, но не доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$, и при этом получена формула $1^2 + 2^2 + \ldots + 2022^2 - 2022$	11 баллов
Замечено, но не доказано, что при фиксированном m, число способов выбрать пары n и k равно $(2023 - m)^2 - 1$	8 баллов
Арифметическая ошибка на этапе подсчёта ответа по верной формуле	-2 балла
Задача решается в предположении, что 0 - натуральное число	-3 балла
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Доказана оценка на 166	15 баллов
Доказана оценка на 165	10 баллов
Доказана лемма 2 авторского решения или эквивалентное утверждение без получения оценки на 165 или 166	5 баллов
Получена оценка на 165 с использованием леммы 2 авторского решения, но сама лемма не доказана	5 баллов
Построен верный пример на 166 и доказано, что он подходит	5 баллов
Оценки на числа, отличные от 165 и 166	0 баллов
Ответы, отличные от 165 и 166	0 баллов