

8 класс

1. Можно ли расставить натуральные числа от 1 до 9 (каждое – по одному разу) в клетки таблицы 3×3 так, чтобы в каждой строке сумма чисел делилась нацело на 9 и в каждом столбце сумма чисел делилась нацело на 9? (20 баллов)

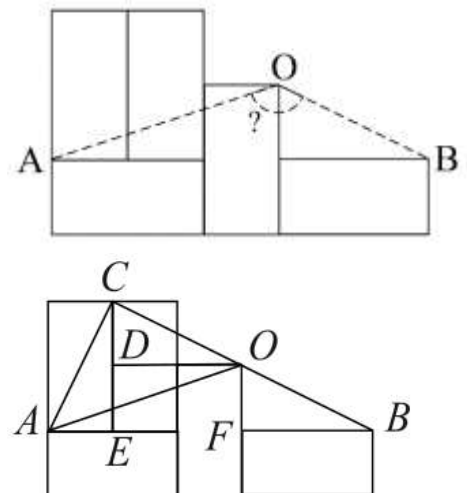
Решение: Да, например так:

1	3	5
8	4	6
9	2	7

Ответ: можно

2. На рисунке изображено 5 равных прямоугольников. Найдите угол AOB (в градусах). (20 баллов)

Решение: Из левой части рисунка несложно видеть, что одна из сторон прямоугольника в два раза больше другой, следовательно, при проведении через точку O прямой, параллельной BF , точка D поделит отрезок CE пополам. Поэтому $\triangle AEC = \triangle CDO = \triangle BFO$. Из равенства треугольников CDO и BFO получаем, что $\angle OBF = \angle COD$ при параллельных прямых OD и BF , а значит точки C, O, B лежат на одной прямой. Из равенства треугольников CDO и AEC следует, что $OC = AC$ и $\angle ACO = \angle ACE + \angle OCE = \angle ACE + \angle CAE = 90^\circ$. Значит, треугольник ACO – прямоугольный равнобедренный, откуда $\angle AOC = 45^\circ$ и $\angle AOB = 135^\circ$.



Ответ: 135°

3. Перед вами сегмент-цифры. Для отображения времени на электронных часах для каждой цифры используются семь сегментов, каждый из которых может быть подсвечен или нет; подсвеченные сегменты образуют цифру, как показано на рисунке



То есть для отображения нуля используется шесть сегментов, для единицы – два сегмента, и так далее. При этом на электронных часах отображаются лишь часы и минуты. Сколько минут в течение суток для отображения момента времени используется большее количество подсвеченных сегментов, чем через минуту? (Сутки начинаются в 00:00 и заканчиваются в 23:59) (20 баллов)

Решение: Выпишем количество сегментов, необходимых для отображения каждой цифры:



6 2 5 5 4 5 6 3 7 6

Рассмотрим несколько типов отображаемого времени:

- 1) Последняя цифра минут не равна 9. Тогда следующее отображаемое время отличается одной последней цифрой. Тогда чтобы сегментов стало меньше, последняя цифр минут в данный момент должны быть равна 0, 3, 6 или 8. Всего в сутках такое время отображается $24 \cdot 6 \cdot 4 = 576$ минут.
- 2) Последняя цифра минут равна 9, но число минут не равно 59. Тогда в следующую минуту последняя цифра станет нулём и число фрагментов для её отображения не изменится, значит это число должно уменьшиться в десятках минут. То есть цифра десятков минут может быть равна только 0 и 3. Всего в сутках такое время отображается $24 \cdot 2 = 48$ минут.
- 3) Число минут равно 59, а число часов не оканчивается на 9. Тогда в следующую минуту число минут будет равно нулю, а значит число сегментов для отображения минут увеличится на 1. Поэтому число сегментов для отображения последней цифры часов должно уменьшиться хотя бы на 2, то есть последняя цифра часов может быть равна только 0 и 6. Всего в сутках такое время отображается 5 минут.
- 4) Число минут равно 59, а число часов оканчивается на 9. Тогда в следующую минуту будет отображаться одно из времён 10: 00, 20: 00 – подходит только время 09: 59.

Итого всего в сутках подходящее время отображается $576 + 48 + 5 + 1 = 630$ минут.

Ответ: 630 минут

4. Маша выбрала натуральное число n и выписала на доску все натуральные числа от 1 до $6n$. Затем половину из этих чисел Маша уменьшила в два раза, треть чисел – уменьшила в три раза, а все оставшиеся числа – увеличила в шесть раз. Могла ли сумма всех полученных чисел совпасть с суммой исходных чисел? (20 баллов)

Решение: Да, такое могло произойти. Пусть $n = 2$, тогда сумма всех чисел от 1 до 12 равна

$$1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 78.$$

Пусть числа 2, 3, 5, 9, 10, 11 Маша уменьшила в два раза, числа 4, 6, 8, 12 – уменьшила в три раза, а числа 1, 7 – увеличила в шесть раз. Тогда сумма полученных чисел будет равна

$$\frac{2 + 3 + 5 + 9 + 10 + 11}{2} + \frac{4 + 6 + 8 + 12}{3} + 6(1 + 7) = 78.$$

Ответ: могла

5. Двое играют в игру. На доске написано число 2022. За один ход требуется заменить имеющееся на доске число a на другое (отличное от a), полученное в результате одной из трёх операций:

- 1) Вычитание 3;
- 2) Вычитание из числа a остатка от деления числа $a - 2$ на 7;
- 3) Вычитание из числа a остатка от деления числа $5a - 1$ на 7.

Игрок, после хода которого впервые появилось отрицательное число, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от действий соперника? (20 баллов)

Решение: Ничьи быть не может, так как по требованию задачи число должно изменяться после каждого хода, а значит с каждым ходом число на доске будет уменьшаться и когда-то станет отрицательным. Игрок, получивший число 2018 на своём ходу, либо имеет выигрышную стратегию, либо она есть у оппонента. Первый игрок может повлиять на то, кому достанется число 2018, а значит и у него есть выигрышная стратегия – докажем это. Если первый игрок хочет, чтобы оппонент получил в начале своего хода число 2018 оппоненту, он делает второе действие: 2022 имеет остаток 6 при делении на 7, а значит число $a - 2$ имеет остаток 4 при делении на 7, то есть в результате второго действия получится 2018.

Если первый игрок хочет сам начать ход с числа 2018, первым ходом он делает третье действие: 2022 имеет остаток 6 при делении на 7, а значит $5a - 1 \equiv_7 5 \cdot 6 - 1 = 29 \equiv_7 1$, то есть в результате третьего действия получится 2021. Число 2021 имеет остаток 5 при делении на 7, а значит при $a = 2021$ имеют место сравнения $5a - 1 \equiv_7 a - 2 \equiv_7 3$, то есть при любом ходе второго получится 2018. Следовательно, выигрышная стратегия есть у первого игрока.

Ответ: первый игрок

Критерии оценки

Задача 1

Верный пример	20 баллов
Неверный пример или его отсутствие	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
При подсчёте угла выписана неверная теорема косинусов, в следствие чего косинус угла найден неверно с точностью до знака	12 баллов
Верное решение опирается на недоказанный факт принадлежности трёх точек одной прямой	12 баллов
Верный ответ, выраженный через тригонометрические функции, но не посчитанный в градусной мере	5 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
При верном в целом решении посчитан один лишний случай	18 баллов
При верном в целом решении потеряна одна минута подходящего времени	18 баллов
При верном в целом решении потерян случай с 9 минутами	15 баллов
При делении всего времени на группы, указанные в авторском решении, неверно посчитано количество подходящих минут в одной группе	15 баллов
Верно решена задача, в которой количество сегментов, используемое для отображения времени, меньше, чем через минуту	15 баллов
При делении всего времени на группы, указанные в авторском решении, верно посчитано количество времени в двух из них, а в двух других допущены логические ошибки при подсчёте	12 баллов
При подсчёте не учитывается число сегментов в часах, в следствие чего потеряны случаи с 59 минутами	10 баллов
Без обозначенного деления всего времени на группы, верно посчитаны две группы чисел, указанные в авторском решении	8 баллов
Без обозначенного деления всего времени на группы, посчитана одна группа чисел, указанная в авторском решении, или её существенная часть	5 баллов
При подсчёте чисел в группах допущена арифметическая ошибка	-2 балла за каждую
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 4

Верный пример того, что суммы могли совпасть, с указанием того, как именно нужно изменять числа	20 баллов
Неверные примеры совпадения сумм или доказательство того, что суммы не могли совпасть	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
При расстановке выигрышных и проигрышных позиций указана, но не доказана закономерность их расстановки	7 баллов
Доказано, что первый игрок всегда может сделать ход, чтобы получилось число с остатком 2 при делении на 7	7 баллов
Присутствует идея расстановки выигрышных и проигрышных позиций, однако сами позиции расставлены неверно	3 балла
Необоснованные или неверные стратегии за любого из игроков	0 баллов