9 класс

1. Типография определяет стоимость печати книги так: складывает стоимость обложки со стоимостью каждого листа, а результат округляет вверх до ближайшего целого числа рублей (например, если получилось 202 рубля 1 копейка, то это округляется до 203 рублей). Известно, что стоимость книги объёмом 104 листа составляет 134 рубля, а книги объёмом 192 листа – 181 рубль. Сколько стоит печать обложки, если она стоит целое число рублей, а стоимость одного листа – целое число копеек? (20 баллов)

Решение: Переведём все стоимости в копейки. Пусть одна страница стоит x копеек, а обложка – $100y$ копеек. Тогда по условию задачи имеем

$$\begin{cases} 13300 < 100y + 104x \le 13400, \\ 18000 < 100y + 192x \le 18100. \end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим $4600 < 88x < 4800$. Целочисленными решениями неравенства являются $x = 53$ и $x = 54$.

Если $x = 53$, то $7788 < 100y \le 7888$ и $y = 78$. Но тогда $100y + 192x = 17976$, что противоречит второму неравенству.

Если $x = 54$, то $7684 < 100y \le 7784$ и $y = 77$. Тогда $100y + 192x = 18068$.

Ответ: страница стоит 54 копейки, обложка стоит 77 рублей

2. Назовём натуральное число $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ *антиквадратом*, если $a_k \neq 0$ и число $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$ является точным квадратом (к примеру, числа 94 и 441 являются антиквадратами, а числа 51 и 190 – нет). Докажите, что число $400 \dots 005$ (2023 нуля) нельзя представить в виде суммы двух антиквадратов. (20 баллов)

Решение: Допустим, данное число можно представить в виде суммы двух антиквадратов. Одно из них (назовём его a) не меньше половины указанного числа, то есть не меньше $200 \dots 003$ (2023 нуля). Квадраты не могут оканчиваться на цифры 2 и 3, а значит число a начинается на 4 и не меньше числа $400 \dots 001$. Второе число в таком случае однозначное и поэтому оно одновременно и антиквадрат, и квадрат, то есть может быть равно лишь 1 и 4. Если оно равно 1, то $a = 400 \dots 004$, а если оно равно 4, то $a = 400 \dots 001$. Оба этих числа не являются антиквадратами, так как числа $100 \dots 004 = (10^{1012})^2 + 4$ и $400 \dots 004 = (2 \cdot 10^{1012})^2 + 4$ не являются квадратами (разница с ближайшими квадратами слишком мала). Значит исходное число не представимо в виде требуемой суммы.

3. Максим придумал новый способ деления чисел на двузначное число N. Для того, чтобы поделить произвольное число A на число N, нужно сделать следующие действия:

1) Разделить A на сумму цифр числа N;

2) Разделить A на произведение цифр числа N;

3) Вычесть из первого результата второй.

Для каких чисел N способ Максима будет давать верный результат? (20 баллов)

Решение: Обозначим $N = \overline{xy} = 10x + y$, где x, y – цифры. Необходимо найти все пары (x, y) такие, что $\frac{A}{10x+y} = \frac{A}{x+y} - \frac{A}{xy}$, то есть $\frac{1}{10x+y} = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{xy}$. Заметим, что $y \neq 0$. Преобразуем к виду

$$xy(x + y) = xy(10x + y) - (x + y)(10x + y)$$

$$(x + y)(10x + y) = xy \cdot 9x$$

$$10x^2 + 11xy + y^2 = 9yx^2$$

Решим уравнение как квадратное относительно x. Для это перепишем уравнение в виде

$$(10 - 9y)x^2 + 11yx + y^2 = 0$$

$$D = 121y^2 - 4y^2(10 - 9y) = 81y^2 + 36y^3 = 9y^2(9 + 4y)$$

Чтобы корень был целым, необходимо, чтобы дискриминант являлся точным квадратом, а значит и $9 + 4y$ – точный квадрат. Перебирая значения y от 1 до 9, подойдёт лишь $y = 4$. Тогда корнями уравнения являются числа $x_1 = \frac{-11\cdot4+3\cdot4\cdot5}{2\cdot(10-9\cdot4)} = -\frac{4}{13}$ и $x_2 = \frac{-11\cdot4-3\cdot4\cdot5}{2\cdot(10-9\cdot4)} = 2$. Подойдёт лишь $x = 2$, то $N = 24$. Для этого числа способ Максима даёт верный результат.

Ответ: 24

4. Квадрат размером 5×5 разбили на квадратики со стороной 1 и у каждого квадратика отметили его центр. Дима провёл четыре отрезка с концами в отмеченных точках так, что никакие два отрезка не пересекаются (даже по отмеченным центрам). Докажите, что после этого он всегда сможет провести пятый отрезок с концами в отмеченных точках так, чтоб он не пересекал никакой другой отрезок. (20 баллов)

Решение: Проведём четыре таких отрезка, удовлетворяющих условию задачи. Теперь по очереди будем продлевать отрезки (в любом порядке) пока они не пересекут границы квадрата или уже продлённые отрезки. Для удобства будем рассматривать не исходные отрезки, а полученные после продления. Точки пересечения всех отрезков и четыре вершины квадрата 5×5 будем называть *вершинами*, а их количество обозначим через В. Вершины делят каждый отрезок, а также стороны квадрата на несколько отрезков, которые мы будем называть *рёбрами*, а их количество обозначим через Р. Части плоскости, включая бесконечную часть, что вне квадрата, будем называть *гранями*, а их количество обозначим через Р. Полученная конструкция называется *плоским* графом, для которой справедлива формула Эйлера:

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2.$$

Если в процессе продления отрезков образовывалась новая вершина, то она поделила какое-то ребро на две части и добавилось также одно ребро. Если же новой вершины не было, то она и не разбила никакое ребро на части, а значит новых рёбер не добавилось. Получается, при любом расположении отрезков и любом способе их продления, величина $\text{В} - \text{Р}$ не меняется и равна, например, когда все отрезки были параллельны сторонам квадрата (см. рисунок 1).

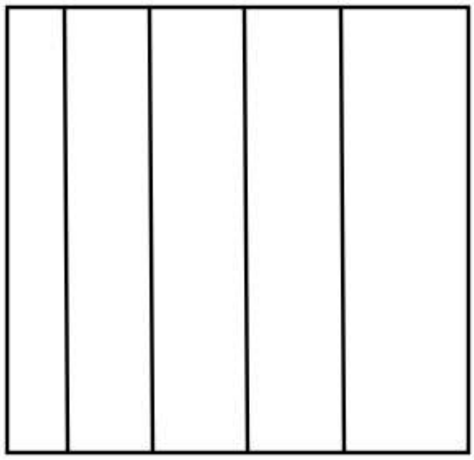

Рис.1. Пример продления отрезков

В этом случае $\text{В} = 12, \text{Р} = 16$. Но тогда по формуле Эйлера $\Gamma = 6$. Вычитая внешнюю часть квадрата, получается, что отрезки разбили квадрат на 5 частей. На каждом из четырёх отрезков лежит не более 5 отмеченных центров, значит не менее 5 точек лежит внутри граней. Если на каждом отрезке лежит ровно 5 точек, то все эти отрезки параллельны сторонам квадрата (например, горизонтальны). Но тогда осталась ещё одна горизонтальная прямая, не задетая другими отрезками. Соединяем пятым отрезком любые две точки с этой горизонтали. Если на отрезках суммарно лежит не более 19 точек, то хотя бы 6 точек лежат строго внутри граней. По принципу Дирихле найдётся грань, содержащая хотя бы две из неиспользованных точек. Каждая грань – выпуклый многоугольник, значит соединив те самые две точки отрезком, он будет лежать строго внутри грани.

5. Для всех натуральных n, больших единицы, докажите неравенство $\sin\left(\frac{30^\circ}{n}\right) > \frac{1}{2n}$. (20 баллов)

Решение: Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом $\frac{60^\circ}{n}$ при вершине и длиной боковой стороны 1. Проведя высоту BH к основанию, получим $\sin\left(\frac{30^\circ}{n}\right) = \frac{BH}{AB} = BH$, откуда $BC = 2\sin\left(\frac{30^\circ}{n}\right)$.

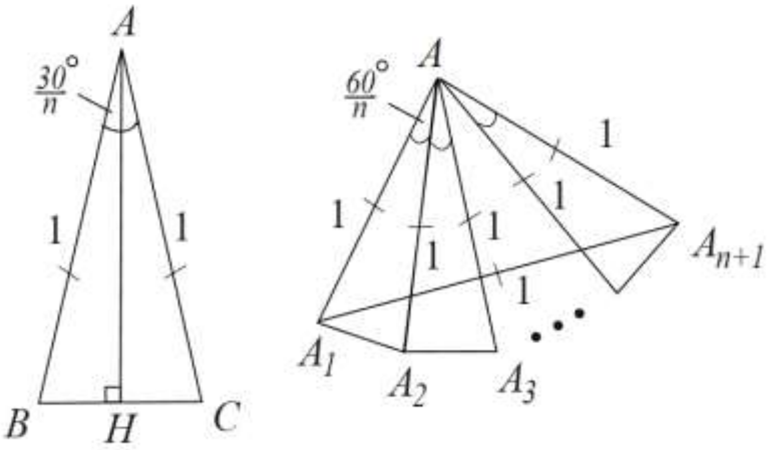

Рис.1. К задаче 9.5

Построим последовательно n таких треугольников с общей вершиной A (см. рисунок 1). При таком построении угол A_1AA_{n+1} будет равен $60°$, а следовательно, треугольник A_1AA_{n+1} – равносторонний и $A_1A_{n+1} = 1$. По неравенству многоугольника $A_1A_{n+1} \leq A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_{n+1} = 2n \cdot \sin\left(\frac{30°}{n}\right)$, а значит $\sin\left(\frac{30°}{n}\right) \geq \frac{1}{2n}$. Равенство может возникнуть лишь в том случае, когда все точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ лежат на одной прямой, чего не может быть, так как $\angle AA_1A_2 \neq 60°$; отсюда следует строгий знак неравенства.

Критерии оценки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Доказано, что стоимость листа составляет либо 53, либо 54 копейки	17 баллов
Верно найдено значение разности округлённых стоимостей книг объёмом 104 и 192 листа. До ответа не доведено	12 баллов
Задача решена для случая, когда округление стоимости первой книги оказалось больше, чем округление стоимости второй	10 баллов
Составлена верная система уравнений	5 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
Доказано, что один из антиквадратов - число из 2025 цифр, начинающееся на 4	7 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Рассмотрены всевозможные варианты числа N за исключением чисел вида $\overline{aa}$	12 баллов
Задача сведена к решению не более чем 9-ти квадратных уравнений, причём в решении это замечено автором	5 баллов
Приведён верный ответ и проверено, что он работает для всех чисел A	3 балла
Доказано, что число N обязано быть кратным 3	2 балла
Только ответ без проверки того, что он подходит	0 баллов
Неверное решение	0 баллов

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Верное решение, основанное на недоказанном факте, что при продлении четыре исходных отрезка поделят квадрат на 5 многоугольников	8 баллов
Неполный перебор случаев отрезков, проведённых Димой	0 баллов

Задача 5

Полное решение	20 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов