

11 класс

1. Дарья Дмитриевна готовит зачёт по теории чисел. Она пообещала каждому студенту дать столько задач, сколько слагаемых он создаст в числовом примере

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2021,$$

где все числа a_i – натуральные, больше 10 и являются палиндромами (не меняются, если их цифры записать в обратном порядке). Если студент не нашёл ни одного такого примера, он получит на зачёте 2021 задачу. Какое наименьшее количество задач может получить студент? (20 баллов)

2. Существует ли многоугольник, не имеющий центра симметрии, который можно разрезать на два выпуклых многоугольника, каждый из которых имеет центр симметрии? (20 баллов)

3. Положительные числа a, b, c, d таковы, что числа a^2, b^2, c^2, d^2 в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию и числа $\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a = b = c = d$. (20 баллов)

4. Найдите количество троек натуральных чисел m, n, k , являющихся решением уравнения $m + \sqrt{n + \sqrt{k}} = 2023$. (20 баллов)

5. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя в каждую клетку таблицы 8×8 записывает число от 1 до 64, используя каждое по одному разу. После этого Вася выбирает одну из клеток и ставит на эту клетку ладью. Затем он выбирает вторую клетку, на которую можно переместиться одним ходом ладьи из первой клетки, и перемещает ладью на эту клетку. Далее он выбирает третью клетку, на которую можно переместиться одним ходом ладьи из второй клетки, и перемещает ладью на эту клетку. Выбирать ранее посещённые клетки запрещено. После этого Вася складывает все три числа, записанных в клетках, на которых стояла ладья. Какую максимальную сумму гарантированно может получить Вася не зависимо от того, каким способом Петя заполнит таблицу? (Ладья может перемещаться на любое количество клеток по горизонтали или вертикали) (20 баллов)