

9 класс

1. Типография определяет стоимость печати книги так: складывает стоимость обложки со стоимостью каждого листа, а результат округляет вверх до ближайшего целого числа рублей (например, если получилось 202 рубля 1 копейка, то это округляется до 203 рублей). Известно, что стоимость книги объёмом 104 листа составляет 134 рубля, а книги объёмом 192 листа – 181 рубль. Сколько стоит печать обложки, если она стоит целое число рублей, а стоимость одного листа – целое число копеек? (20 баллов)

2. Назовём натуральное число $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ антиквадратом, если $a_k \neq 0$ и число $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$ является точным квадратом (к примеру, числа 94 и 441 являются антиквадратами, а числа 51 и 190 – нет). Докажите, что число $400 \dots 005$ (2023 нуля) нельзя представить в виде суммы двух антиквадратов. (20 баллов)

3. Максим придумал новый способ деления чисел на двузначное число N . Для того, чтобы поделить произвольное число A на число N , нужно сделать следующие действия:

- 1) Разделить A на сумму цифр числа N ;
- 2) Разделить A на произведение цифр числа N ;
- 3) Вычесть из первого результата второй.

Для каких чисел N способ Максима будет давать верный результат? (20 баллов)

4. Квадрат размером 5×5 разбили на квадратики со стороной 1 и у каждого квадратика отметили его центр. Дима провёл четыре отрезка с концами в отмеченных точках так, что никакие два отрезка не пересекаются (даже по отмеченным центрам). Докажите, что после этого он всегда сможет провести пятый отрезок с концами в отмеченных точках так, чтоб он не пересекал никакой другой отрезок. (20 баллов)

5. Для всех натуральных n , больших единицы, докажите неравенство

$$\sin\left(\frac{30^\circ}{n}\right) > \frac{1}{2n}. \quad (20 \text{ баллов})$$