

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Вася вырезал из листа бумаги клетчатую фигуру и заметил следующее свойство: у этой фигуры можно выбрать три клетки, после вырезания которых фигура распадётся на восемь частей. Можно ли утверждать, что у этой фигуры всегда можно выбрать и вырезать четыре клетки, что после этого фигура распадётся на восемь частей? Считается, что если две клетки соприкасаются только по углу, то они принадлежат разным частям.

Задание 2. (20 баллов) Одновременно навстречу друг другу вышли Илья Муромец из Мурома и Настасья Микулишна из Киева. Они встретились через несколько часов. Сразу после этого Илья Муромец сел на камень и затужил на 6 часов, а Настасья Микулишна пошла дальше. Илья Муромец, опомнившись, пошёл дальше в Киев, причём ему оставалось пройти такое же расстояние, как и Настасье до Мурома. Уже через час Илья оказался на месте, а Настасья ещё не дошла. Сколько времени осталось идти Настасье Микулишне до Мурома?

Задание 3. (20 баллов) Различные числа a, b, c таковы, что $a^3 + \frac{1}{bc} = b^3 + \frac{1}{ca} = c^3 + \frac{1}{ab}$. Докажите, что ровно одно из чисел a, b, c – отрицательное.

Задание 4. (20 баллов) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a, BC = b$ отметили точки M и N – середины диагоналей AC и BD . Оказалось, что a, b – целые числа, $ab = 7!$ и $MN = \text{НОД}(a; b)$. Найдите длины оснований трапеции. Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Задание 5. (20 баллов) Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. На клетчатом поле, состоящем из двух полосок длиной восемь клеток, стоят две фишки (см. рисунок). За один ход можно выбрать любую фишку и передвинуть её на одну или две клетки, причём если фишка круглая, её можно двигать только вниз, а если треугольная – только вправо. Запрещается ставить обе фишки в одну клетку и перепрыгивать одной фишкой через другую. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

