

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Трёхзначное число состоит из цифр a, b, c и обладает следующими свойствами:

- 1) цифра в разряде единиц равна последней цифре числа $a + b + c$;
- 2) цифра в разряде десятков равна последней цифре числа $ab + bc + ca$;
- 3) цифра в разряде сотен равна последней цифре числа abc .

Найдите все такие числа.

Задание 2. (20 баллов) В шахматном турнире, состоящем из нескольких туров, приняли участие 8 шахматистов. Перед каждым туром всех игроков случайным образом делят на 4 пары, определяя тем самым каждому из шахматистов его противника в этом туре. При этом шахматисты, уже сыгравшие друг с другом ранее, обязательно распределяются в разные пары. Может ли случиться так, что после проведённых 5 туров будет невозможным провести шестой?

Задание 3. (20 баллов) Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного неравностороннего треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка M – середина стороны BC . Описанная окружность треугольника A_1MH пересекает отрезок AM в точке K . Докажите, что KH – биссектриса угла CKB_1 .

Задание 4. (20 баллов) Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z , являющиеся решением уравнения $2^{xy} \cdot z = 2^{x+y}(x + y + z)$.

Задание 5. (20 баллов) Есть доска размера $n \times n$, разделённая на единичные квадраты. Витя хочет выбрать n из этих единичных квадратов со следующим свойством: никакие два квадрата не находятся в одной строке или в одном столбце, и ни у каких четырёх выбранных квадратов центры не лежат на одной прямой. Докажите, что Витя сможет осуществить свою задумку при любом натуральном n .