

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) На вывеске магазина красовалась надпись «Всё по 99», говорящая о том, что в данном магазине каждый товар стоит 99 рублей. В один из дней две девятки на вывеске магазина отвалились. Бригада рабочих, восстанавливающих вывеску, не знала, какими были отпавшие цифры – девятками или шестёрками, а поэтому установили на вывеске неверное двузначное число. Хозяин магазина заметил, что если теперь изменить стоимость всех товаров на новую, указанную на вывеске, суммарная стоимость всего ассортимента снизится на 2025 рублей. Сколько всего товаров в ассортименте магазина?

Задание 2. (20 баллов) В шахматном турнире, состоящем из нескольких туров, приняли участие 6 шахматистов. Перед каждым туром всех игроков случайным образом делят на 3 пары, определяя тем самым каждому из шахматистов его противника в этом туре. При этом шахматисты, уже сыгравшие друг с другом ранее, обязательно распределяются в разные пары. Может ли случиться так, что после проведённых 3 туров будет невозможным провести четвёртый?

Задание 3. (20 баллов) Дан квадрат размера $n \times n$. В каждую клетку квадрата записывают по одному натуральному числу от 1 до 100 (числа в клетках могут повторяться). Сколько существует расстановок чисел в клетки этого квадрата, таких, чтобы в каждом квадрате 2×2 сумма чисел делилась на 4?

Задание 4. (20 баллов) Назовём натуральное число n *забавным*, если оно обладает следующими свойствами:

- 1) в нём чётное количество цифр;
- 2) если разбить его на два числа с одинаковым количеством цифр (первое число состоит из первой половины цифр, записанных в том же порядке, второе – аналогично, из последней половины цифр), причём оба этих числа не начинаются с нуля, то квадрат суммы этих чисел равен n .

Например, число 2025 является забавным, так как $(20 + 25)^2 = 2025$.

Докажите, что существует хотя бы миллион забавных чисел.

Задание 5. (20 баллов) Два одинаковых прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Точка M – середина отрезка BC . Прямая CG пересекает отрезок BE в точке K . Оказалось, что точки M, G, E лежат на одной прямой. В каком отношении точка K делит отрезок BE ?

