

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) На прямой отмечены точки A, B, C, D (именно в таком порядке). Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает окружность, проходящую через точки C и D , в точках E и F . Оказалось, что $\angle AEC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle BFD = 90^\circ$.

Задание 2. (20 баллов) Существуют ли 2025 последовательных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: все эти числа можно разделить на две группы таким образом, что десятичная запись суммы всех чисел первой группы состоит только из троек, а десятичная запись суммы всех чисел второй группы состоит только из четвёрок?

Задание 3. (20 баллов) Про положительные числа a и b известно, что $a + \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{a+b} = 5$. Найти наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+b}{a^2}$.

Задание 4. (20 баллов) В шахматном турнире, состоящем из нескольких туров, приняли участие $2n$ шахматистов. Перед каждым туром всех игроков случайным образом делят на n пар, определяя тем самым каждому из шахматистов его противника в этом туре. При этом шахматисты, уже сыгравшие друг с другом ранее, обязательно распределяются в разные пары. Оказалось, что в турнире удалось провести 5 раундов, при этом невозможно провести 6 раунд с соблюдением правил турнира. Найдите все возможные значения n .

Задание 5. (20 баллов) На шахматной доске 8×8 стоят короли. Два короля бьют друг друга, если стоят в клетках, соприкасающихся хотя бы по углу. Каждого короля спросили, сколько других королей находится под его боем. Ответы были следующие: «один король», «два короля», «три короля», ..., « n королей». Оказалось, что все короли, стоящие на белых клетках доски, сказали правду, а все короли, стоящие на чёрных клетках, солгали. Найдите наибольшее возможное значение n .