

10 класс

1. Про функцию f известно, что для каждого двузначного числа её значение равно одной из цифр этого числа (например, $f(13)$ может быть равно 1 или 3). А также для любых трёх ненулевых цифр a, b, c верно равенство

$$f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bc}) \cdot f(\overline{ca}) = abc.$$

Найдите значение суммы

$$f(11) + \dots + f(19) + f(21) + \dots + f(29) + \dots + f(91) + \dots + f(99). \text{ (20 баллов)}$$

Решение: Для любой ненулевой цифры a верно $f(\overline{aa}) = a$. Возьмём различные цифры a, b и составим числа $\overline{ab}, \overline{bb}$ и $\overline{ba}$. По условию $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bb}) \cdot f(\overline{ba}) = ab^2$, значит $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{ba}) = ab$. Это возможно только в случае, когда $f(\overline{ab})$ и $f(\overline{ba})$ равны a и b в каком-то порядке, следовательно $f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = a + b$. Заметим тогда, что исходная сумма равна сумме всех цифр, умноженной на половину их количества. Каждая цифра встречается ровно 18 раз, значит искомая сумма равна $9(1 + 2 + \dots + 9) = 405$.

Ответ: 405.

2. На телевизионном шоу ведущий предложил участнику сыграть в следующую игру. Ведущий выложил в ряд пять мешочков, в которых лежит 1, 2, 3, 4 и 5 золотых монет, причём известно, что в любых двух соседних мешочках количество золотых монет отличается не более чем на 2. За одну попытку участник может выбрать любое количество любых имеющихся мешочков и спросить, сколько в них суммарно золотых монет. Как за две попытки участнику определить, в каком из мешочков лежат пять золотых монет? (20 баллов)

Решение: Если мешочек с пятью монетами лежит не с краю, то он обязан лежать между мешочками с тремя и четырьмя монетами. За две попытки спрашиваем про два крайних мешочка. Если в одном из них пять монет, участник победил. Иначе если в одном из крайних мешочков 3 или 4 монеты (причём это не может произойти одновременно), то нужный мешочек соседний с этим крайним. Если же в крайних мешочках 1 и 2 монеты, то нужный мешочек лежит в центре.

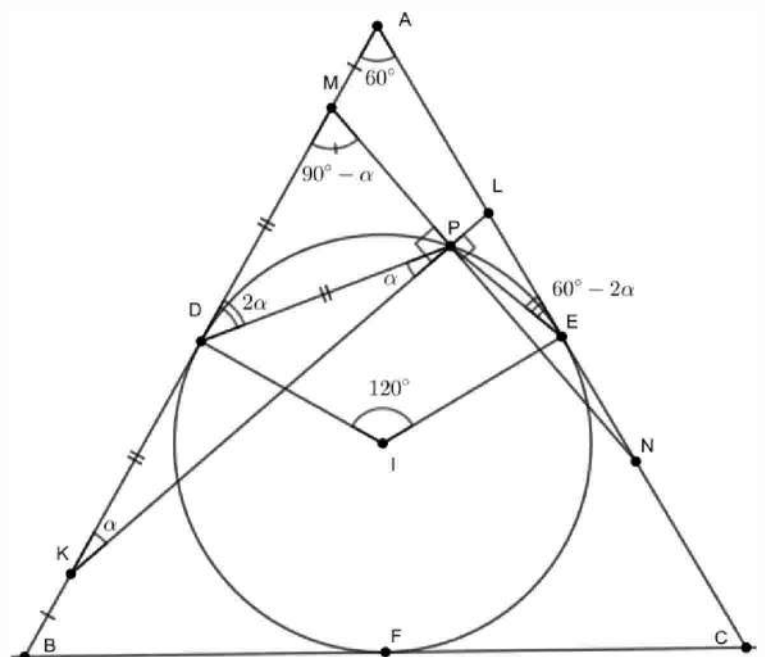
3. Бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ определяется следующим образом: $a_1 = 1, a_2 = 2$, а каждый следующий член последовательности a_n подбирается

так, что $a_n + a_{n-1}$ – составное число, причём a_n – наименьшее, не встречавшееся ранее, натуральное число. Докажите, что в этой последовательности встретятся все натуральные числа. (20 баллов)

Решение: Возьмём последовательность, удовлетворяющую условиям задачи, и предположим, что есть натуральное число, которое в ней не встретилось. Если таких чисел несколько, возьмём среди них минимальное и назовём его x . Рассмотрим индекс k такой, что среди членов последовательности от a_1 до a_k встречаются все числа от 1 до $x - 1$. Если a_k и x одинаковой чётности, то $a_{k+1} = x$. Иначе все члены последовательности, начиная с a_k , одной чётности, отличной от чётности x . Поскольку до a_k выписано конечное количество чисел каждой чётности, то начиная с некоторого номера все числа этой же чётности ещё не встречались в последовательности. Пусть такое число a_m , тогда $a_{m+1} = a_m + 2$ и $a_{m+2} = a_m + 4$. Числа a_m, a_{m+1}, a_{m+2} имеют разные остатки при делении на три, а значит какое-то из них в сумме с x делится на три, причём x меньше каждого из них – противоречие. Следовательно, каждое натуральное число в последовательности есть.

4. Вписанная окружность равностороннего треугольника ABC касается его сторон AB, AC и BC в точках D, E и F соответственно. На дуге DE , не содержащей точку F , отметили точку P . Через точку P провели две взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2 . Прямая l_1 пересекла стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая l_2 пересекла стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Оказалось, что $AM = BK$. Докажите, что $AL = CN$. (20 баллов)

Решение: Поскольку треугольник ABC – равносторонний, точки D и E – середины сторон AB и AC , значит $MD = DK$. В прямоугольном треугольнике PMK отрезок PD – медиана, значит $PD = MD = DK$. Пусть $\angle PKD = \alpha$, тогда $\angle DPK = \alpha, \angle PDM = 2\alpha, \angle PMD = 90^\circ - \alpha$. Обозначим через I центр вписанной окружности ABC .



Четырёхугольник $ADIE$ – вписанный, значит $\angle DIE = 120^\circ$. Тогда $\angle ADP + \angle AEP = \frac{1}{2} \angle DIE$ и $\angle AEP = 60^\circ - 2\alpha$. Вычислим угол PLE через сумму углов $ALPM$:

$$\angle PLE = 180^\circ - \angle PLA = 180^\circ - (360^\circ - 60^\circ - 120^\circ - \angle PMA) = 60^\circ + \alpha.$$

В треугольнике PLE имеем $\angle LPE = 180^\circ - \angle PLE - \angle LEP = 60^\circ + \alpha = \angle PLE$. Значит $PE = EL$, а поскольку треугольник LPN – прямоугольный, то

$$\angle EPN = 90^\circ - \angle LPE = 90^\circ - \angle PLE = \angle ENP,$$

откуда $EN = EP$, то есть E – середина отрезка LN . Но она же середина отрезка AC , а значит $AL = CN$.

5. Сколькими способами можно поставить в клетки доски $2n \times 2n$ ладью и слона так, чтобы ни одна из фигур не била другую? Напомним, что ладья бьёт все клетки по горизонтали и вертикали, а слон бьёт все клетки по обеим диагоналям. (20 баллов)

Решение: Будем ставить ладью в какую-то клетку и для каждой поставленной ладьи вычислять количество клеток, в которые нельзя поставить слона. Это будут все клетки, находящиеся с ладьёй в одной горизонтали и вертикали (чтобы ладья не била слона), а также все клетки, находящиеся с ладьёй в тех же диагоналях (чтобы слон не бил ладью). Разделим доску на «рамки» из клеток. Первая рамка состоит из граничных клеток квадрата, а каждая следующая – из границ квадрата на 2 клетки меньшего размера (см. рисунок). Пусть ладья стоит в верхней-левой клетке какой-то рамки. Сдвинув ладью на одну клетку вправо, длина одной из диагоналей, содержащей ладью, уменьшится на 1, а другой – увеличится на 1, таким образом число запрещённых клеток для ладей будет одинаковым. Аналогично для всех клеток верхней стороны рамки. Дойдя до правого-верхнего угла, сделаем аналогичные рассуждения для следующей стороны рамки, и так пока не обойдём весь контур. Значит число запрещённых позиций для клеток каждой из рамок такое же, как и для верхней-левой клетки рамки. Пронумеруем рамки числа от 1 до n , начиная с самой большой. Число клеток в первой рамке равно $8n - 4$, а в каждой следующей – на 8 клеток меньше, значит в рамке с номером k всего $8(n - k + 1) - 4 = 8(n - k) + 4$ клеток. Число запрещённых позиций по вертикали и горизонтали для всех клеток доски одинаковое и равно $4n - 1$. Число запрещённых позиций по диагоналям для клеток первой рамки равно $2n - 1$ (так как саму клетку мы считали в вертикальных и горизонтальных), а для каждой следующей рамки – на 2 больше, значит для клеток в рамке с номером k всего $4n - 1 + 2(n + k - 1) - 1 = 6n + 2k - 4$ запрещённых позиций.

Итого вариантов расстановки ладьи и слона, в которых одна из фигур бьёт другую, равно

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (8(n-k) + 4) \cdot (6n + 2k - 4) &= \sum_{k=1}^n (48n^2 - (32k + 8)n - 16k^2 + 40k - 16) = \\
 &= 48n^3 - 32n \sum_{k=1}^n k - 8n^2 - 16 \sum_{k=1}^n k^2 + 40 \sum_{k=1}^n k - 16n = \\
 &= 48n^3 - 16n^2(n+1) - 8n^2 - 16 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 20n(n+1) - 16n = \\
 &= \frac{80n^3 - 36n^2 + 4n}{3}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой суммы квадратов первых n натуральных чисел, а именно

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Всего число способов поставить ладью и слона на доску равно $4n^2 \cdot 4n^2 = 16n^4$ (мы учитываем вариант с совпадающими клетками, поскольку до этого учитывали его в подсчёте пар запрещённых позиций). А значит число интересующих нас способов равно

$$16n^4 - \frac{80n^3 - 36n^2 + 4n}{3} = \frac{48n^4 - 80n^3 + 36n^2 - 4n}{3}.$$

Ответ: $\frac{48n^4 - 80n^3 + 36n^2 - 4n}{3}.$

Критерии проверки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Доказано, что существует только две функции, удовлетворяющие условию задачи	15 баллов
В верном решении с правильным ответом отсутствует доказательство того, что $f(ab) + f(ba) = a + b$ или аналогично с тройкой функций	10 баллов
Доказано, что $f(ab) + f(ba) = a + b$	5 баллов
Приведён пример подходящей функции и получен верный ответ	3 балла
Арифметическая ошибка в верном решении	-2 балла

Задача 2

Верный алгоритм поиска мешочка с доказательством	20 баллов
При доказательстве алгоритма упущен 1 случай, не влияющий на работу алгоритма	17 баллов
Верный алгоритм поиска без обоснования, либо с неполным обоснованием, содержащем ошибки	8 баллов

Неверный алгоритм поиска мешочка	0 баллов
----------------------------------	----------

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Доказано, что в качестве следующего члена последовательности подойдёт любое число той же чётности, что и предыдущий член	3 балла

Задача 4

Полное решение	20 баллов
----------------	-----------

Задача 5

Верно составлена формула в незамкнутом виде для подсчёта требуемых пар	8 баллов
Верно посчитано число подходящих пар в случае, когда ладья стоит с краю доски	3 балла
Задача сведена к расстановке на доске двух ферзей. Замечено, что количество клеток, которые бьёт ферзь, константа в каждой квадратной рамке и увеличивается на 2 при переходе к меньшей рамке	3 балла