

## 11 класс

1. Про функцию  $f$  известно, что для каждого двузначного числа её значение равно одной из цифр этого числа (например,  $f(13)$  может быть равно 1 или 3). А также для любых трёх ненулевых цифр  $a, b, c$  верно равенство

$$f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bc}) \cdot f(\overline{ca}) = abc.$$

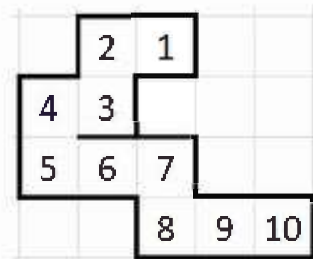
Найдите значение суммы

$$f(11) + \dots + f(19) + f(21) + \dots + f(29) + \dots + f(91) + \dots + f(99). \text{ (20 баллов)}$$

**Решение:** Для любой ненулевой цифры  $a$  верно  $f(\overline{aa}) = a$ . Возьмём различные цифры  $a, b$  и составим числа  $\overline{ab}, \overline{bb}$  и  $\overline{ba}$ . По условию  $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bb}) \cdot f(\overline{ba}) = ab^2$ , значит  $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{ba}) = ab$ . Это возможно только в случае, когда  $f(\overline{ab})$  и  $f(\overline{ba})$  равны  $a$  и  $b$  в каком-то порядке, следовательно  $f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = a + b$ . Заметим тогда, что исходная сумма равна сумме всех цифр, умноженной на половину их количества. Каждая цифра встречается ровно 18 раз, значит искомая сумма равна  $9(1 + 2 + \dots + 9) = 405$ .

**Ответ: 405.**

2. *Змейкой* называется клетчатая фигура, каждая клетка которой (начиная со второй) граничит с предыдущей клеткой по стороне. На рисунке приведён пример змейки из 10 клеток с указанием их порядка. Дима и Максим нашли клетчатое поле размером  $2025 \times 2025$  клеток и по очереди рисуют на нём змеек длиной 8 клеток. Начинает Дима. Нельзя рисовать змеек в клетках, которые были использованы для уже нарисованных змеек.



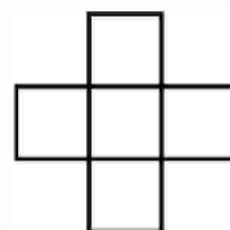
Проигрывает тот, кто больше не может нарисовать змейку. Кто из игроков выигрывает независимо от игры соперника? (20 баллов)

**Решение:** Пусть своим первым ходом Дима ограничит змейкой кольцо из восьми клеток вокруг центральной клетки поля, будем называть такую змейку *центральной кольцом*. В дальнейшем после любого хода Максима следующий ход Димы будет симметричен относительно этой центральной клетки. Докажем, что в свой ход Максим не сможет провести змейку через две центрально-симметричные клетки. Если клетка примыкает к центральному кольцу, то до центрально-симметричной клетки ей нужно пройти хотя бы половину периметра кольца, примыкающего к центральному кольцу, то есть её путь

состоит хотя бы из 8 клеток, а сама змейка в таком случае – хотя бы из 9 клеток. Для всех остальных клеток либо весь путь будет проходить по полупериметру ещё большего кольца, либо задействовать клетки предыдущего кольца, но тогда мы можем заменить такие клетки в пути на клетки следующего кольца и путь будет такой же длины. Значит Дима всегда сможет сделать симметричный ход и не сможет проиграть. Игра закончится, когда кто-то не сможет сделать ход, и это может быть только Максим. Значит побеждает Дима.

**Ответ: Дима.**

3. Доска размером  $8 \times 8$  разбита на единичные квадраты. Какое наименьшее количество пятиклеточных крестов (см. рисунок) можно вырезать из этой доски так, чтобы из оставшейся части нельзя было вырезать ещё один такой крест? (20 баллов)



**Решение:** Выделим кресты, как показано на рисунке «Оценка». Заметим, что любой вырезанный крест пересекает не более одного выделенного креста. Значит после вырезания трёх и менее крестов всегда можно будет вырезать четвёртый, например, в одном из выделенных мест. На рисунке «Пример» можно увидеть четыре вырезанных креста без возможности вырезать пятый.

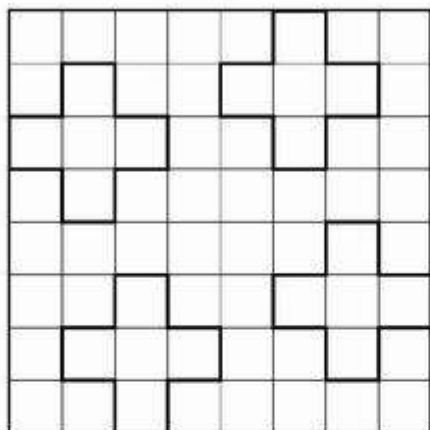


Рис. Оценка

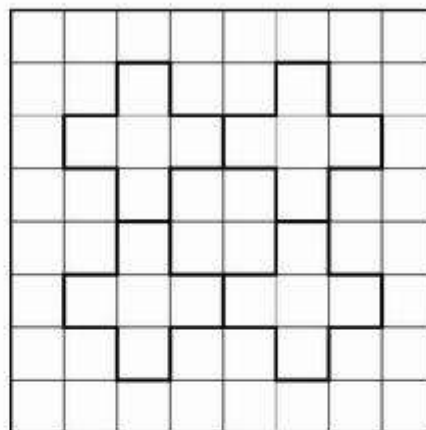


Рис. Пример

**Ответ: 4.**

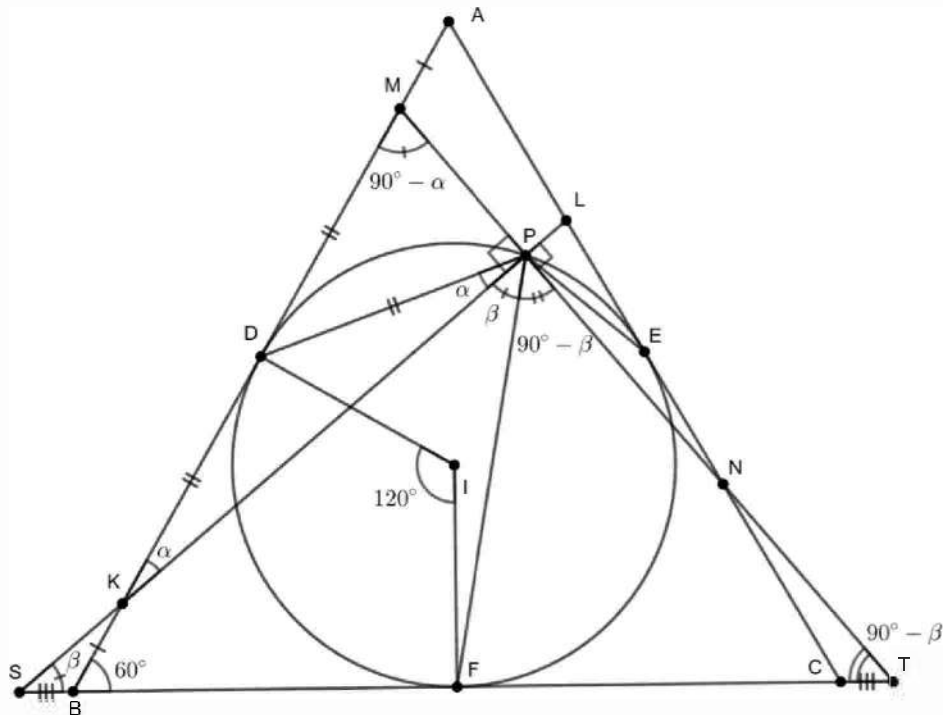
4. Вписанная окружность равностороннего треугольника  $ABC$  касается его сторон  $AB, AC$  и  $BC$  в точках  $D, E$  и  $F$  соответственно. На дуге  $DE$ , не содержащей точку  $F$ , отметили точку  $P$ . Через точку  $P$  провели две взаимно перпендикулярные прямые  $l_1$  и  $l_2$ . Прямая  $l_1$  пересекла стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно, а прямую  $BC$  – в точке  $S$ .

Прямая  $l_2$  пересекла стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а прямую  $BC$  – в точке  $T$ . Оказалось, что  $BS = CT$ . Докажите, что  $MK + LN = ST$ . (20 баллов)

**Решение:** Поскольку треугольник  $ABC$  – равносторонний, точки  $D, E$  и  $F$  – середины сторон  $AB, AC$  и  $BC$ , значит  $SF = FT$ . В прямоугольном треугольнике  $PST$  отрезок  $PF$  – медиана, значит  $PF = FS = FT$ . Пусть  $\angle DPK = \alpha, \angle FSP = \beta$ , тогда  $\angle SPF = \beta, \angle FPD = \angle FTP = 90^\circ - \beta$  и  $\angle DPM = 90^\circ - \alpha$ . Обозначим через  $I$  центр вписанной окружности  $ABC$ . Четырёхугольник  $DIFB$  – вписанный, значит  $\angle DIF = 120^\circ$ . Тогда  $\alpha + \beta = \angle DPF = \frac{1}{2} \angle DIE = 60^\circ$ . В треугольнике  $BMT$  имеем:

$$\angle BMT = 180^\circ - \angle FTP - \angle MBT = 90^\circ - \alpha = \angle DPM.$$

Значит  $DPM$  – равнобедренный и  $\angle MKP = 90^\circ - \angle KMP = \alpha = \angle DPK$ , отсюда  $KD = DP = DM$ . Аналогично доказывается, что  $EN = PE = EL$ . Тогда равенство, которое необходимо



доказать, равносильно  $PD + PE = PF$ . Для вписанного четырёхугольника  $PEFD$  применим теорему Птолемея:

$$DP \cdot EF + DF \cdot EP = DE \cdot PF,$$

а поскольку треугольник  $DEF$  равносторонний, получаем требуемое.

**Замечание 1:** Теорема Птолемея принимается без доказательства.

**Замечание 2:** Если на дуге  $AB$ , не содержащей точку  $C$ , описанной окружности равностороннего треугольника  $ABC$  взять точку  $P$ , то  $PA + PB = PC$ . Данный факт называется *теоремой Помпею*, которая также принимается без доказательства.

5. Даны два множества:  $A = (0;1) \cup (2;3) \cup (4;5)$  и  $B = (1;2) \cup (3;4) \cup (5;6)$ . Найдите все значения параметра  $k$ , при которых уравнение  $(k-2)x^2 + (k-1)^2x + k = 0$  имеет два корня  $x_1, x_2$  такие, что  $x_1 \in A$  и  $x_2 \in B$ . (20 баллов)

**Решение:** Если  $k = 2$ , то уравнение будет линейным:  $x + 2 = 0$  – у него только один корень. Рассмотрим функцию  $f(x) = (k-2)x^2 + (k-1)^2x + k$ , графиком которой является парабола, и заметим, что  $f(x) = ((k-2)x + 1)(x + k)$ .

Пусть  $k > 2$ , тогда ветви параболы направлены вверх. Если  $x_1 \in A$  и  $x_2 \in B$ , то среди чисел  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  больше  $x_1$  чётное количество и меньше него – нечётное, больше  $x_2$  нечётное количество и меньше него – чётное. Поэтому на отрезке с концами  $x_1$  и  $x_2$  находится нечётное количество чисел среди  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , а вне этого отрезка – чётное. Во всех точках отрезка с концами  $x_1$  и  $x_2$  функция  $f(x)$  принимает отрицательные значения, а вне отрезка – положительные. Если  $k < 2$ , то наоборот. Значит

$$(k-2) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) \cdot f(6) < 0.$$

При этом в точках с абсциссами 0 и 6 знак функции должен совпадать со знаком  $k-2$ , значит

$$(k-2) \cdot f(0) > 0, (k-2) \cdot f(6) > 0.$$

Вдобавок, абсцисса вершины параболы должна лежать в интервале  $(0;6)$  и для существования двух различных корней дискриминант должен быть положительным. В итоге получим систему

$$\begin{cases} (k-2) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) \cdot f(6) < 0 \\ (k-2) \cdot f(0) > 0 \\ (k-2) \cdot f(6) > 0 \\ 0 < -\frac{(k-1)^2}{2(k-2)} < 6 \\ (k-1)^4 - 4k(k-2) > 0 \end{cases}$$

Из четвёртого неравенства следует, что  $k-2 < 0$ . Тогда из  $\frac{(k-1)^2}{2(2-k)} < 6$  следует  $(k-1)^2 < 12(2-k)$ , то есть  $k^2 + 10k - 23 < 0$ . Решением неравенства является  $-4\sqrt{3} - 5 < k < 4\sqrt{3} - 5$ .

Пятое неравенство запишется в виде  $(k^2 - 2k + 1)^2 - 4(k^2 - 2k) > 0$ . Пусть  $t = k^2 - 2k$ , тогда оно примет вид  $(t+1)^2 - 4t > 0$ , что равносильно  $(t-1)^2 > 0$ , откуда  $t \neq 1$ . Значит  $k^2 - 2k - 1 \neq 0$  и  $k \neq 2 \pm \sqrt{2}$ . Но  $k < 2$ , значит  $k \neq 2 - \sqrt{2}$ .

Теперь система упростится до вида

$$\begin{cases} f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) > 0 \\ f(0) < 0 \\ f(6) < 0 \\ -4\sqrt{3} - 5 < k < 4\sqrt{3} - 5 \\ k \neq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Второе и третье неравенства запишутся как  $k < 0$  и  $(6k - 11)(k + 6) < 0$ . Решением такой системы будет  $-6 < k < 0$ .

Первое неравенство переписывается в виде

$$(k - 1)(k + 1) \cdot (2k - 3)(k + 2) \cdot (3k - 5)(k + 3) \cdot (4k - 7)(k + 4) \cdot (5k - 9)(k + 5) > 0.$$

Решив неравенство методом интервалов, помня, что  $-6 < k < 0$ , получим

$$k \in (-6; -5) \cup (-4; -3) \cup (-2; -1).$$

Поскольку  $-4\sqrt{3} - 5 < -6, 4\sqrt{3} - 5 > -1$  и  $2 - \sqrt{2} > 0$  никаких решений не пропадёт.

**Ответ:**  $k \in (-6; -5) \cup (-4; -3) \cup (-2; -1)$ .

**Замечание:** Некоторые неравенства в системе в процессе решения оказались «лишними», однако в общем случае подобной задачи необходимо учитывать их всех.

### Критерии проверки

#### Задача 1

|                                                                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Полное решение                                                                                                                      | 20 баллов |
| Доказано, что существует только две функции, удовлетворяющие условию задачи                                                         | 15 баллов |
| В верном решении с правильным ответом отсутствует доказательство того, что $f(ab) + f(ba) = a + b$ или аналогично с тройкой функций | 10 баллов |
| Доказано, что $f(ab) + f(ba) = a + b$                                                                                               | 5 баллов  |
| Приведён пример подходящей функции и получен верный ответ                                                                           | 3 балла   |
| Арифметическая ошибка в верном решении                                                                                              | -2 балла  |

#### Задача 2

|                                          |           |
|------------------------------------------|-----------|
| Верная стратегия за Диму с обоснованием  | 20 баллов |
| Верная стратегия за Диму без обоснования | 8 баллов  |
| Любая стратегия за Максима               | 0 баллов  |

#### Задача 3

|                    |           |
|--------------------|-----------|
| Полное решение     | 20 баллов |
| Оценка без примера | 12 баллов |
| Верный пример      | 5 баллов  |

**Задача 4**

|                           |
|---------------------------|
| Специальных критериев нет |
|---------------------------|

**Задача 5**

|                                                                                                                                              |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Полное решение                                                                                                                               | 20 баллов |
| При переборе вариантов расположения корней получен верный ответ, но потеряны случаи, когда корень из множества В меньше корня из множества А | 10 баллов |
| Найдены корни уравнения или получено разложение квадратного трёхчлена на линейные множители                                                  | 7 баллов  |
| Доказано, что $k < 2$ (не суммируется с другими критериями)                                                                                  | 3 балла   |
| Доказано, что $k < 0$ (не суммируется с другими критериями)                                                                                  | 5 баллов  |