

8 класс

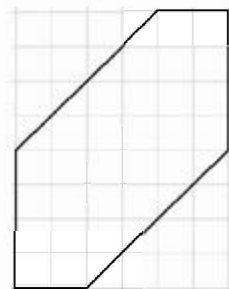
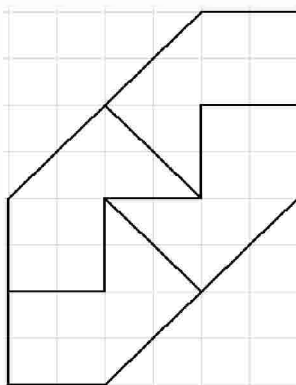
1. В комнате было 10 человек, каждый из которых является либо рыцарем, которые всегда говорят правду, либо лжецом, которые всегда лгут. Они начали по очереди выходить из комнаты. Первый вышел и сказал: «В комнате осталось 0 рыцарей». Второй вышел и сказал: «В комнате остался 1 рыцарь». Третий вышел и сказал: «В комнате осталось 2 рыцаря», и так далее. Десятый вышел и сказал: «В комнате осталось 9 рыцарей». Сколько рыцарей было в комнате изначально? (20 баллов)

Решение: Если рыцарей не было, то первый вышедший сказал бы правду – противоречие. Значит есть хотя бы один рыцарь. Пусть рыцарей хотя бы двое. После выхода второго рыцаря осталось ещё меньше рыцарей, чем после выхода первого, однако второй называет большее число оставшихся рыцарей – противоречие. Следовательно рыцарь мог быть только один. Такое могло быть, если он выходил первым.

Ответ: один.

2. Разрежьте фигурку, изображённую на рисунке, на 4 равные части. Разрезы могут проходить не по линиям сетки. (20 баллов)

Решение:



3. Дан равнобедренный треугольник ABC . На сторонах AB, BC и AC выбраны соответственно точки D, E и F . Оказалось, что

$$\angle CEF = 2\angle CFE, \angle BED = 3\angle CFE, \angle BDE = 4\angle CFE.$$

Найдите углы треугольника ABC . (20 баллов)

Решение: Обозначим $\angle CFE = \alpha$, тогда $\angle CEF = 2\alpha, \angle BED = 3\alpha, \angle BDE = 4\alpha$. По сумме углов в треугольниках BDE и CFE получим $\angle C = 180^\circ - 3\alpha, \angle B = 180^\circ - 7\alpha$. По сумме углов в треугольнике ABC получим $\angle A = 10\alpha - 180^\circ$. Ясно, что $\angle B \neq \angle C$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть $\angle A = \angle C$. Тогда $10\alpha - 180^\circ = 180^\circ - 3\alpha$, откуда $\alpha = \frac{360^\circ}{13}$. Но в таком случае

$$\angle B = 180^\circ - 7 \cdot \frac{360^\circ}{13} < \frac{180^\circ}{13} \text{ — противоречие.}$$

2) Пусть $\angle A = \angle B$. Тогда $10\alpha - 180^\circ = 180^\circ - 7\alpha$, откуда $\alpha = \frac{360^\circ}{17}$. Такой треугольник

существует, два его угла равны $10 \cdot \frac{360^\circ}{17} - 180^\circ = \frac{540^\circ}{17}$ и ещё один равен $180^\circ - 3 \cdot$

$$\frac{360^\circ}{17} = \frac{1980^\circ}{17}.$$

Ответ: $\frac{540^\circ}{17}, \frac{540^\circ}{17}, \frac{1980^\circ}{17}$.

Замечание. Доказательство существования треугольника можно опустить, поскольку он единственный, а из условия задачи следует, что такой есть.

4. Существуют ли такие различные натуральные числа k, l, m , что выполняется равенство

$$\frac{1}{k!} + \frac{2}{l!} = \frac{3}{m!}?$$

Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. (20 баллов)

Решение: Среди k, l, m число m не может быть наибольшим, иначе $\frac{1}{k!} + \frac{2}{l!} > \frac{1}{m!} + \frac{2}{m!} = \frac{3}{m!}$.

Также число m не может быть наименьшим, иначе $\frac{1}{k!} + \frac{2}{l!} < \frac{1}{m!} + \frac{2}{m!} = \frac{3}{m!}$. Тогда m — среднее по величине. Рассмотрим случаи:

Случай 1. $k > m > l$, тогда $\frac{3}{m!} \geq \frac{2}{l!} \geq \frac{2}{(m-1)!}$, откуда $3(m-1)! > 2m!$, а значит $3 > 2m!$.

Последнее неравенство выполняется только при $m = 1$, но тогда l не натуральное.

Случай 2. $l > m > k$, тогда $\frac{3}{m!} > \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(m-1)!}$, откуда $3(m-1)! > m!$, а значит $3 > m!$.

Последнее неравенство выполняется только при $m \leq 2$. Случай с $m = 1$ невозможен,

поскольку тогда k не натуральное. Если $m = 2$, то $k = 1$ и $\frac{1}{1!} + \frac{2}{l!} = \frac{3}{2!}$. Но тогда $l! = 4$, что невозможно. Следовательно, таких троек чисел k, l, m не существует.

Ответ: не существуют.

5. Мастеру Чо рассказали про фестиваль Кунг-Фу, который будет проходить в течение недели.

Он узнал, что в нём будет участвовать 33 человека и каждый участник будет посещать фестиваль не менее 4 дней. Мастер Чо очень хочет показать свой стиль “Бешеного петуха”, но, к сожалению, он сможет посетить фестиваль лишь в какие-то 3 дня. Он уже узнал у всех

участников, в какой из дней каждый из них сможет прийти. Сможет ли мастер Чо выбрать три дня для посещения фестиваля так, чтобы каждый из участников смог узреть его невероятный стиль? (20 баллов)

Решение: Сопоставим каждому участнику фестиваля тройку дней, в которые этот участник не посетит фестиваль – таких троек всего 33. Если участник не увидит мастера Чо, значит выбранная мастером тройка дней совпадёт с тройкой участника. Троек дней, которые мастер Чо может посетить, всего $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$, значит хотя бы одна тройка не совпадёт ни с одной из троек участников – её мастер Чо и выберет.

Ответ: сможет.

Критерии проверки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Доказано, что рыцарей не больше одного	10 баллов
Верный ответ с проверкой	3 балла

Задача 2

Верный пример разрезания фигуры	20 баллов
Указана форма частей, на которые надо резать фигуру, однако самого разрезания нет	5 баллов
Неверный пример разрезания фигуры	0 баллов

Задача 3

Рассмотрен только случай $AB=BC$, при котором треугольника не существует	7 баллов
Углы треугольника ABC выражены через угол CFE (через альфа, икс и т. д.)	3 балла
Рассмотрен только случай $AC=BC$, при котором треугольник существует, и получен ответ	10 баллов
Рассмотрен случай равенства углов BAC и ACB и получено значение угла CFE, но дальнейших продвижений нет	5 баллов
Арифметические ошибки при вычислении углов	снимается 2 балла

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Доказано, что m – не максимальная из трёх переменных	3 балла

Задача 5

Специальных критериев нет	
---------------------------	--