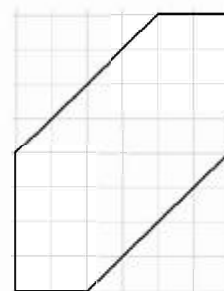
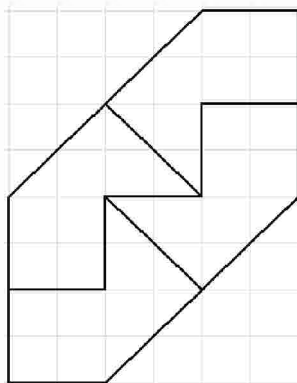


9 класс

1. Разрежьте фигурку, изображённую на рисунке, на 4 равные части. Разрезы могут проходить не по линиям сетки. (20 баллов)

Решение:



2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A . Пусть M и L – точки пересечения медиан и биссектрис соответственно треугольника ABC . Известно, что $ML = 1$. Найдите длину отрезка BC . (20 баллов)

Решение: Пусть H – основание высоты, проведённой из вершины A к гипотенузе BC .

Тогда AH – медиана и $BH = CH = AH$. По теореме Пифагора $AH^2 + BH^2 = 2BH^2 = AB^2$.

Тогда $AB: BH = \sqrt{2}$. По теореме о биссектрисе $AL: LH = AB: BH = \sqrt{2}$, значит $LH = \frac{AL}{\sqrt{2}}$ и

$AH = AL + LH = AL \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $AL = AH \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = AH \cdot (2 - \sqrt{2})$. По свойству точки

пересечения медиан $AM = \frac{2}{3}AH$. Следовательно,

$$1 = ML = AM - AL = \frac{2}{3}AH - AH \cdot (2 - \sqrt{2}) = AH \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{4}{3}\right) = AH \cdot \frac{3\sqrt{2} - 4}{3}$$

и $BC = 2AH = \frac{6}{3\sqrt{2}-4} = 3(3\sqrt{2} + 4)$.

Ответ: $BC = 3(3\sqrt{2} + 4)$.

3. В каждой клетке квадрата 8×8 записали число 0. Коля выбрал 8 клеток этого квадрата и заменил нули в этих клетках на числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, причём каждое число было использовано по одному разу. После этого сумма чисел в каждой строке осталась чётной, и сумма чисел в каждом столбце осталась чётной. Сколькими способами Коля мог таким образом заменить числа в таблице? (20 баллов)

Решение: Выберем клетку с нечётным числом. Сумма в строке и столбце, содержащих это нечётное число, должна быть чётной, значит в какой-то клетке этих строки и столбца есть

нечётное число. Назовём выбранную клетку в строке a , а клетку в столбце – b . Суммы в столбце с клеткой a и в строке с клеткой b должны быть чётными, значит на их пересечении стоит оставшееся нечётное число. В итоге нечётные числа стоят в вершинах прямоугольника. Число способов выбрать прямоугольник равно числу способов выбрать две строки и два столбца, содержащих стороны этого прямоугольника, то есть $\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 28^2$ способов, а способов расставить нечётные числа в его вершинах – $4! = 24$. Чётные числа можно поставить в любые из оставшихся 60 клеток $60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57$ способами. Итого получаем $24 \cdot 28^2 \cdot 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57$ способов.

Ответ: $24 \cdot 28^2 \cdot 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57$.

4. Гарри Поттер встретил на южном полюсе стадо из 2026 пингвинов. Он знает четыре заклинания. После первого заклинания количество пингвинов в стаде возрастает на 373, после второго – возрастает на 776, после третьего – уменьшается на 557, а после четвёртого – уменьшается на 712. Нельзя использовать заклинание, после которого число пингвинов станет отрицательным. За какое наименьшее число заклинаний Гарри Поттер может получить стадо из 2025 пингвинов? Гарри может использовать любое количество заклинаний в любом порядке. (20 баллов)

Решение: Заметим, что $776 = 25 \cdot 31 + 1$, $373 = 12 \cdot 31 + 1$, $-557 = -18 \cdot 31 + 1$ и $-712 = -23 \cdot 31 + 1$. Это означает, что после любого заклинания остаток от деления на 31 числа пингвинов увеличивается на 1. Чтобы из остатка числа получить остаток предыдущего числа, необходимо этот остаток увеличить хотя бы на 30, значит меньше 30 заклинаний не хватит.

Построим пример на 30 заклинаний: применим первое заклинание 7 раз, второе – 8 раз, третье – 12 раз, четвёртое – 3 раза. Действительно,

$$7 \cdot 373 + 8 \cdot 776 - 12 \cdot 557 - 3 \cdot 712 = -1.$$

Ответ: 30

Замечание: До рассмотрения числа 31 можно было догадаться, рассмотрев попарные разности между числами 373, 776, -557, -712. Все такие разности нацело делятся на 31, что и влечёт совпадение остатков этих чисел при делении на 31.

5. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он отличен от единицы и самого числа. Найдите все возможные значения составного натурального числа $n \geq 100$, если известно, что любой его собственный делитель d удовлетворяет неравенствам

$$\sqrt{n-100} < d < \sqrt{n+100}. \quad (20 \text{ баллов})$$

Решение: Пусть $n = p^2$, где p – простое число, большее 10. Тогда единственный его собственный делитель p , очевидно, удовлетворяет условию.

Если n – чётное, то у него есть делитель $d = 2$, и неравенство $\sqrt{n-100} < 2$ выполнится лишь при $n = 100$ и $n = 102$. Оба числа не подходят, так как их делители 50 и 51 соответственно больше $\sqrt{n+100}$. Значит n – нечётное.

Если $n = pq$, где $q > p$ – различные простые числа, то $q - p \geq 2$. Тогда

$$q^2 < pq + 100 \leq (q-2)q + 100,$$

из чего следует $2q < 100$, то есть $q < 50$. Также из неравенства $q^2 < pq + 100$ следует $q(q-p) < 100$. Выпишем все нечётные простые числа до 50:

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

Если $q \geq 29$, то разность $q - p$ не может быть 4 или больше, а значит подойдут числа $41 \cdot 43 = 1763, 29 \cdot 31 = 899$.

Если $q \geq 17$, то разность $q - p$ не может быть 6 или больше, а значит подойдут числа $19 \cdot 23 = 437, 19 \cdot 17 = 323, 13 \cdot 17 = 221$.

Если $q = 13$, то подойдёт только число $11 \cdot 13 = 143$.

Остальные значения не подойдут, так как тогда $pq < 100$.

Если $n = abc$, где a, b, c – собственные делители (возможно, совпадающие) числа n . Тогда перемножая неравенства с правым корнем для чисел ab, bc, ca , получим $n^2 = a^2 b^2 c^2 < (\sqrt{n+100})^3$. Поскольку $n \geq 100$, то $n + 100 > (abc)^{\frac{4}{3}} > 64^{\frac{4}{3}} = 256$, откуда $n > 156$.

Аналогично, перемножая неравенства с левым корнем для чисел a, b, c , получим

$$(\sqrt{n-100})^3 < abc = n. \text{ Возведя обе части в квадрат и приведя подобные, получим}$$

$$n^3 - 301n^2 + 30000n - 1000000 = (n-125)(n(n-176) + 8000) < 0.$$

Выражение в первой скобке положительное, а во второй равно $(n-88)^2 + 256 > 0$.

Значит неравенство не выполняется и чисел в этом случае нет.

Ответ: $n = p^2$, где $p \geq 11$ – простое, и числа **143, 221, 323, 437, 899, 1763**.

Критерии проверки

Задача 1

Верный пример разрезания фигуры	20 баллов
Указана форма частей, на которые надо резать фигуру, однако самого разрезания нет	5 баллов
Неверный пример разрезания фигуры	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
Правильно посчитана длина катета вместо гипотенузы	Баллы не снимаются
Арифметическая ошибка при нахождении AL. В остальном решение верное	8 баллов
Верно составлено уравнение для нахождения MN	8 баллов
Арифметические ошибки при подсчёте гипотенузы	снимается 2 балла

Задача 3

Полное решение	20 баллов
При верном подсчёте подходящих вариантов подсчитаны лишние способы расположения нечётных чисел в одной строчке или столбце	17 баллов
Доказано, что нечётные числа расположены в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Подсчёт количества прямоугольников произведён неверно, но верно подсчитано число способов расставить оставшиеся чётные числа	10 баллов
Сказано, но не доказано, что число прямоугольников равно 28^2 . Остальное верно	10 баллов
Верно посчитано количество способов расставить нечётные числа внутри прямоугольника	5 баллов
Верно посчитано количество способов выбрать прямоугольник	5 баллов
Доказано, что нечётные числа расположены в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата	3 балла

Указанные продвижения не суммируются!

Задача 4

Верный алгоритм из 30 заклинаний без доказательства минимальности	8 баллов
Верный алгоритм получения 2025 за любое количество операций	3 балла

Задача 5

Доказано, что при простом $p \geq 11$ число $n = p^2$ является решением	3 балла
Получены все ответы вида $n = pq$, где p и q – различные простые числа, без доказательства того, что других таких чисел больше нет	3 балла