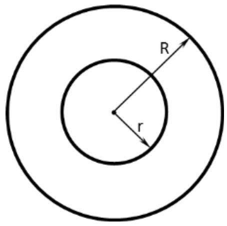
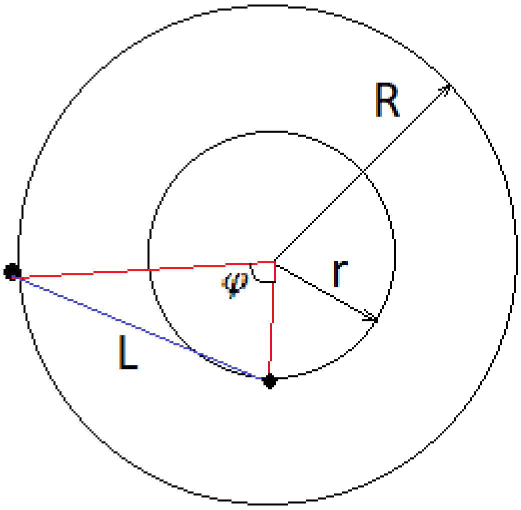
Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Пусть существует круглый остров радиуса r. Вокруг острова находится вода, в диапазоне расстояний от r до R от его центра, и эта вода движется с угловой скоростью ω. Скорость лодки в стоячей воде U. Найти расстояние L, на которое переместится лодка при переплывании на остров, если её собственная скорость будет направлена по радиусу к центру острова.

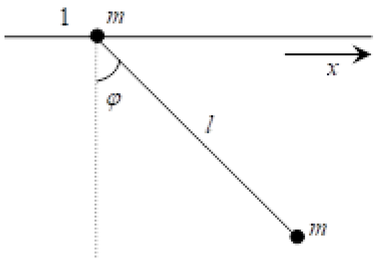


Решение
Время, которое лодка будет двигаться:
$$t = \frac{R-r}{U}$$
Угол, на который «повернётся» лодка:
$$\varphi = \omega t = \frac{\omega}{U}(R-r)$$



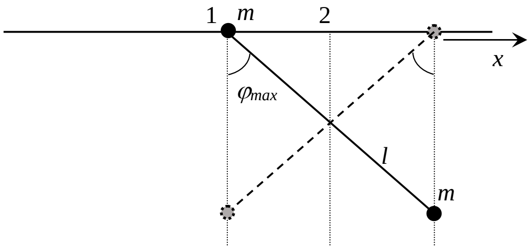
По теореме косинусов найдём L:
$$L^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi$$
$$L = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\frac{\omega}{U}(R-r)\right)}.$$

Задание 2. (20 баллов) На рисунке изображен плоский маятник, в точке крепления которого (1 на Рисунке) находится масса m_1, свободно перемещающаяся вдоль оси *x*. Эта масса соединена с грузом такой же массы невесомым стержнем длины *l*. В начале движения маятник отклонен на угол φ от вертикали, начальные скорости обеих масс равны нулю. Найти амплитуду колебаний точки крепления маятника вдоль *x*.



Решение

На рисунке ниже показаны крайние положения маятника. Положение оси симметрии 2 в ходе колебаний не изменяется, поскольку совпадает с x-координатой центра инерции маятника, а внешних сил, направленных вдоль оси x, нет.



Примем крайнее положение точки 1 за нулевую координату вдоль оси x. Тогда, координата центра инерции x_C даётся формулой

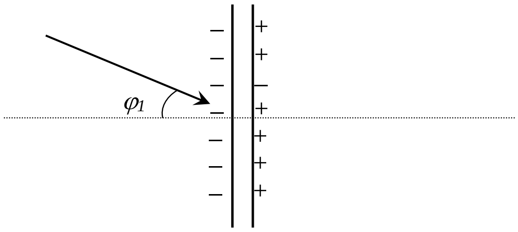
$$x_C = \frac{m \cdot l \sin(\varphi)}{m+m} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin(\varphi).$$

Из рисунка видно, что искомая амплитуда колебаний точки 1

$$x_{1,\max} - x_{1,\min} = 2 \cdot x_C = l \cdot \sin(\varphi)$$

Ответ: амплитуда колебаний точки 1 равна $l \cdot \sin(\varphi)$.

Задание 3. (20 баллов) Частица, имеющая массу m и заряд q, движется сквозь плоский конденсатор, прозрачный для этой частицы, под углом φ_1 к оси, перпендикулярной его пластинам, с начальной скоростью v_1. На пластинах есть заряд $\pm q$. Известна также емкость конденсатора C. Как изменится направление вектора скорости частицы после прохождения сквозь конденсатор?



Решение

Между пластинами конденсатора существует разность потенциалов

$$\Delta U = \frac{q}{C} \tag{1}$$

Пусть φ_2 – угол движения частицы после прохождения пластин конденсатора. В плоскости, параллельной пластинам, на частицу никаких сил не действует, так что компонента скорости, параллельная пластинам, не изменится, а модули скоростей «до» и «после» конденсатора (v_1 и v_2) будут связаны соотношением

$$v_1 \sin(\varphi_1) = v_2 \sin(\varphi_2) \tag{2}$$

С учетом прохождения разности потенциалов между пластинами, закон сохранения энергии, задающий новую скорость частицы v_2, будет иметь вид

$$m\frac{v_2^2}{2} + \Delta U \cdot q = m\frac{v_1^2}{2} \tag{3}$$

С учетом (1), соотношение (3) преобразуется к виду

$$m\frac{v_1^2}{2}\cdot\left(\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}\right)^2+\Delta U\cdot q=m\frac{v_1^2}{2}\Rightarrow$$
$$\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}=\sqrt{1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\Delta U\cdot q}. \qquad (4)$$

Полученный результат можно считать ответом задачи. Приемлемы также любые способы получения угла φ_2 либо его синуса из формулы (4). В частности,

$$\sin(\varphi_2)=\sin(\varphi_1)\cdot\left(1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\Delta U\cdot q\right)^{-1/2}. \qquad (5)$$

Отметим, что формулировка задачи позволяет считать заряд частицы q и модуль заряда на пластинах конденсатора, обозначенный через $\pm q$, одинаковыми. Соответственно, допустимо представление ответа в форме

$$\sin(\varphi_2)=\sin(\varphi_1)\cdot\left(1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\frac{q^2}{C}\right)^{-1/2}. \qquad (5)$$

Ответ: $\sin(\varphi_2)=\sin(\varphi_1)\cdot\left(1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\Delta U\cdot q\right)^{-1/2}$ (см. формулы выше).

Задание 4. (20 баллов) В теплоизолированном сосуде с площадью дна S находится вода массой $m_л$ при температуре t_1. В воду положили кубик льда массой $m_л$ при температуре t_2. Плотность воды равна ρ_0, удельные теплоёмкости воды и льда равны соответственно $c_в$ и $c_л$, удельная теплота плавления льда равна $\lambda_л$. Известно, что лёд растаял не до конца. Найти массу льда, перешедшего в жидкое состояние (Δm). Может ли Δm быть меньше нуля? Если да, то при каких условиях?

Решение

$|Q|=-c_Л m_Л t_2+\lambda_1\Delta m$ (1)

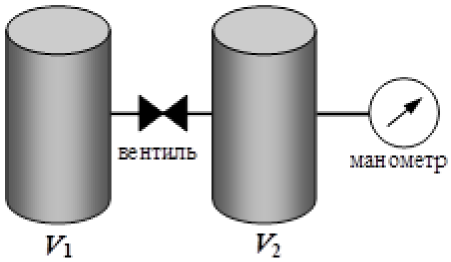
$|Q|=c_в m_в t_1$ (2)

Из (1) и (2) ➔ $\Delta m=\frac{c_в m_в t_1+c_Л m_Л t_2}{\lambda_Л}$.

Если $\Delta m<0$, часть воды, которая изначально была в сосуде, кристаллизуется.

Это возможно, если модуль величины теплоты, необходимой для изменения температуры льда до 0 больше, чем модуль теплоты, необходимой для изменения температуры воды до нуля.

Задание 5. (20 баллов) На рисунке изображены два объема, соединенные вентилем. Величины объемов известны, внутри находится воздух. Манометр измеряет давление в объёме V_2 относительно окружающей среды (то есть, разность между давлением $P(V_2)$ и атмосферным давлением). В начале процесса вентиль открыт, манометр показывает давление P_0. Затем вентиль закрыли, а воздуха в объем V_1 добавили, без изменения температуры. В дальнейшем вентиль был немного приоткрыт, так что давление в объёме V_2 увеличивалось постепенно, и зависимость показаний манометра от времени $P_{V2}(t)$ была записана (считать её известной). В конце концов, вентиль открыли полностью, после чего измерили манометром полученное давление P_1. Какова была зависимость от времени разности давлений в объемах V_2 и V_1?



Решение

Будем считать, что все значения давлений P, используемые ниже, заранее пересчитаны от фактических показаний манометра P^* к абсолютному давлению, суммированием с атмосферным давлением P_A:

$$P = P^* + P_A.$$

Согласно закону Менделеева-Клайперона,

$$P_0 \cdot (V_1 + V_2) = \nu_0 RT, \qquad (1)$$

где R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, ν_0 – исходное количество молей газа во всей системе. Аналогично,

$$P_1 \cdot (V_1 + V_2) = \nu_1 RT \; - \qquad (2)$$

уравнение, связывающее конечное давление P_1 с конечным количеством молей ν_1.

Из формул (1-2) получается, что количество молей, добавленных в объём V_1 после перекрывания вентиля ($\Delta\nu$), даётся соотношением

$$\Delta\nu \cdot RT = (P_1 - P_0)(V_1 + V_2) \qquad (3)$$

В процессе перетекания газа из объёма 1 в объём 2, изменение количества молей и давления в объёме 2 связаны следующим образом:

$$\nu_2(t) \cdot RT = P_{V2}(t) \cdot V_2 = P_0 V_2 + \Delta\nu_2(t) \cdot RT \qquad (4)$$

Отсюда,

$$\Delta\nu_2(t) \cdot RT = \left(P_{V2}(t) - P_0\right) \cdot V_2$$

В объёме V_1 давление будет постепенно уменьшаться:

$$P_{V1}(t) \cdot V_1 = P_0 V_1 + \left(\Delta\nu - \Delta\nu_2(t)\right) \cdot RT = P_0 V_1 + (P_1 - P_0) \cdot (V_1 + V_2) - \Delta\nu_2(t) \cdot RT \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) получаем искомую разность давлений в объёмах 1 и 2:

$$\begin{aligned}\left(P_{V2}(t) - P_{V1}(t)\right) &= \Delta\nu_2(t) \cdot RT \cdot \left(\frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_1}\right) - (P_1 - P_0) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = \\ &= \left(P_{V2}(t) - P_0\right) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} - (P_1 - P_0) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = \\ &= \left(P_{V2}(t) - P_1\right) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = \left(P_{V2}(t) - P_1\right) \cdot \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right).\end{aligned} \qquad (6)$$

Отметим, что в результирующей формуле присутствует только разность показаний манометра, так что знать атмосферное давление для её применения не нужно, при условии его постоянства.

Ответ: $\left(P_{V2}(t) - P_{V1}(t)\right) = \left(P_{V2}(t) - P_1\right) \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} = \left(P_{V2}(t) - P_1\right) \cdot \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right).$