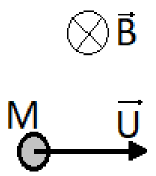
Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100



Задание 1. (20 баллов) Пуля массой *m* врезается в заряженный шар и застревает в нём. После столкновения заряд шара и пули стал равен *q*. В результате столкновения шар начал двигаться по радиусу *R* в магнитном поле с известной индукцией *B*. Необходимо найти начальную скорость пули U_0.

$F = Ma_ц = qUB$ Сила Лоренца

M – суммарная масса шара и пули

$$a_ц = \frac{qUB}{M} = \frac{U^2}{R}$$

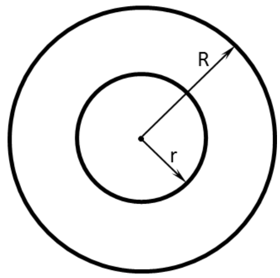
$U = \frac{RqB}{M}$ Скорость шара

Закон сохранения импульса в момент столкновения:

$$mU_0 = MU = RqB$$
$$U_0 = \frac{RqB}{m}.$$

Ответ: $U_0 = \frac{RqB}{m}$

Задание 2. (20 баллов) Пусть существует круглый остров радиуса *r*. Вокруг острова находится вода, в диапазоне расстояний от r до *R* от его центра, и эта вода движется с угловой скоростью ω. Скорость лодки в стоячей воде *U* (*U* > *ωR*). Найти время *t*, за которое лодка переплывёт реку, если она будет двигаться перпендикулярно течению.



Решение:

Представим скорость лодки как вектор, который в каждый момент времени направлен под углом φ к радиальной прямой, проведенной из центра окружности, показанной на Рисунке, через точку, где находится лодка. Для того, чтобы лодка двигалась перпендикулярно течению, должно всегда выполняться условие

$$U\sin(\varphi) = \omega\cdot(R - x(t)), \tag{1}$$

где *x*(*t*) – расстояние, пройденное лодкой от берега к центру острова за время *t*.

При условии (1), скорость перемещения лодки вдоль радиальной прямой (к острову) будет следующей:

$$\frac{dx}{dt} = U\cos(\varphi), \tag{2}$$

откуда

$$dt = \frac{dx}{U\cos(\varphi)}. \tag{3}$$

Можно теперь получить из условия (1), что

$$\cos(\varphi) = \sqrt{1-\sin^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2\cdot(R-x(t))^2}{U^2}}, \tag{4}$$

после чего проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$t = \int_0^t dt = \int_0^{R-r} \frac{dx}{\sqrt{U^2 - \omega^2(R-x)^2}}. \tag{5}$$

Отметим, что интеграл (5) является «табличным», чем можно воспользоваться. Однако, проще не рассматривать соотношения (4), а сразу получить dx из формулы (1):

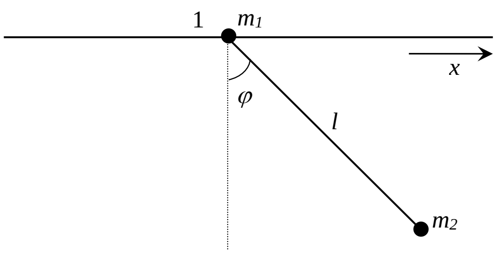
$$U\sin(\varphi)=\omega\cdot(R-x(t))\Rightarrow dx=-\frac{U}{\omega}d(\sin(\varphi))=-\frac{U}{\omega}\cos(\varphi)\,d\varphi\,. \quad (6)$$

Теперь,

$$t=\int_0^t dt=\int_{\varphi(x=0)}^{\varphi(x=R-r)}\frac{-(U/\omega)\cos(\varphi)\,d\varphi}{U\cos(\varphi)}=\int_{\varphi(x=R-r)}^{\varphi(x=0)}\frac{d\varphi}{\omega}=\frac{1}{\omega}\cdot(\varphi(x=0)-\varphi(x=R-r))=$$
$$=\frac{1}{\omega}\left(\arcsin\left(\frac{\omega R}{U}\right)-\arcsin\left(\frac{\omega r}{U}\right)\right). \quad (3)$$

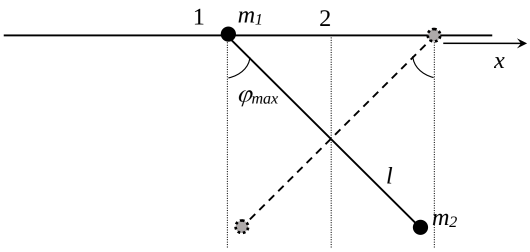
Ответ: $t=\frac{1}{\omega}\left(\arcsin\left(\frac{\omega R}{U}\right)-\arcsin\left(\frac{\omega r}{U}\right)\right).$

Задание 3. (20 баллов) На рисунке изображен плоский маятник, в точке крепления которого (1 на Рисунке) находится масса m_1, свободно перемещающаяся вдоль оси x. Эта масса соединена с грузом массы m_2 невесомым стержнем длины l. Маятник совершает колебания с максимальной кинетической энергией E_{max}. Найти амплитуду движения точки крепления маятника вдоль оси x.



Решение

На рисунке ниже показан вариант крайних положений маятника. Конкретный вид рисунка зависит от соотношения масс m_1 и m_2, однако положение оси симметрии 2 всегда будет совпадать с x-координатой центра инерции маятника, которая в ходе колебаний остаётся постоянной, поскольку никаких внешних сил вдоль оси x не действует.



Примем, что в крайнем левом положении x-координата массы m_1 равна нулю. В этом случае, координата центра инерции x_C даётся формулой

$$x_C=\frac{m_2\cdot l\sin(\varphi_{\max})}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot l\cdot\sqrt{1-\cos^2(\varphi_{\max})}\,.$$

Из рисунка видно, что искомая амплитуда колебаний маятника Δx_1 равна $2\cdot x_C$.

Разница потенциальных энергий маятника в его крайнем и среднем положениях равна максимальной кинетической энергии E_{max}. Отсюда,

$$E_{\max} = l \cdot \left(1 - \cos\left(\varphi_{\max}\right)\right) \cdot m_2 g\ .$$

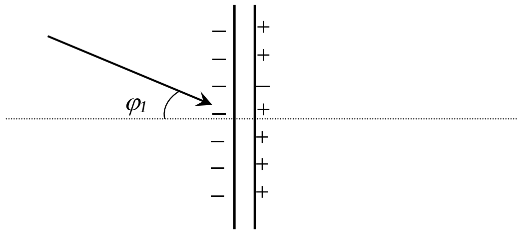
Соответственно,

$$\cos\left(\varphi_{\max}\right) = 1 - \frac{E_{\max}}{m_2 g l}\ .$$

$$x_C = \frac{m_2 \cdot l \sin\left(\varphi_{\max}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot l \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{E_{\max}}{m_2 g l}\right)^2}\ .$$

Ответ: $\Delta x_1 = 2x_C = \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot l \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{E_{\max}}{m_2 g l}\right)^2}$.

Задание 4. (20 баллов) Частица, имеющая массу *m* и заряд *q*, движется сквозь систему из двух пластин, прозрачных для этой частицы, под углом φ_1 к оси, перпендикулярной пластинам, с начальной скоростью v_1. На пластинах есть заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\pm\sigma$. Расстояние между пластинами равно *d*, вся система вакуумирована. Как изменится направление вектора скорости частицы после прохождения пластин?



Решение

Будем полагать пластины бесконечными в направлениях, перпендикулярных нормали, поскольку иного в задаче не сказано. Для определения напряженности поля *E* между пластинами «обернем» любую из них плотно прилегающей поверхностью. Из закона Гаусса (1-го уравнения Максвелла), записанного в интегральной форме, тогда последует, что

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ . \tag{1}$$

Это значит, что между пластинами частица пройдёт разность потенциалов $\Delta U = E \cdot d = \sigma \cdot d/\varepsilon_0$ (на положительной пластине потенциал будет выше). Этот же результат можно получить с использованием известной формулы для ёмкости плоского конденсатора площади *S*, с зарядом $\pm q$ на обкладках:

$$\Delta U = \frac{q}{C} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0 \cdot S / d} = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0}\ .$$

Пусть φ_2 – угол движения частицы после прохождения пластин. В плоскости, параллельной пластинам, на частицу никаких сил не действует, так что компонента скорости, параллельная пластинам, не изменится, и будет выполняться соотношение

$$v_1 \sin\left(\varphi_1\right) = v_2 \sin\left(\varphi_2\right)\ . \tag{2}$$

С учетом прохождения разности потенциалов между пластинами, закон сохранения энергии, задающий новую скорость частицы v_2, будет иметь вид

$$m\frac{v_2^2}{2}+\Delta U\cdot q=m\frac{v_2^2}{2}+\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q=m\frac{v_1^2}{2}. \qquad (3)$$

С учетом (2), он преобразуется к виду

$$m\frac{v_1^2}{2}\cdot\left(\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}\right)^2+\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q=m\frac{v_1^2}{2}\Rightarrow$$
$$\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}=\sqrt{1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q}. \qquad (4)$$

Полученный результат можно считать ответом задачи. Приемлемы также любые способы получения угла φ_2 либо его синуса из формулы (4). Отметим, в частности, что возможна запись решения в форме

$$\mathrm{tg}(\varphi_2)=\frac{\sin(\varphi_1)}{\sqrt{\cos^2(\varphi_1)-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q}},\text{ поскольку }\sin(\varphi)=\frac{\mathrm{tg}(\varphi)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\varphi)}}.$$

Ответ: $\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}=\sqrt{1-\frac{2}{mv_1^2}\cdot\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}q}$.

Задание 5. (20 баллов) В теплоизолированном сосуде с площадью дна *S* находится вода массой $m_в$ при температуре t_1. В воду положили кубик льда массой $m_л$ при температуре t_2. Плотность воды равна ρ_0, удельные теплоёмкости воды и льда равны соответственно $c_в$ и $c_л$, удельная теплота плавления льда равна $\lambda_л$. Найти массу Δm растаявшего льда и конечную температуру $t_к$ системы после установления равновесия. Известно, что после установления равновесия в сосуде осталась вода.

Решение

Полагаем ниже, что температуры *t* представлены в градусах Цельсия, и что температура плавления льда равна 0 °C.

1 случай: лёд полностью растаял. Реализуется в случаях $t_к > 0$

$$t_k=\frac{c_в m_в t_1+c_Л m_Л t_2-\lambda_Л m_Л}{c_в(m_л+m_в)},\ \Delta m=m_л. \qquad (1)$$

2 случай: лёд растаял не до конца. Реализуется в случаях, когда расчёт по формуле выше даёт $t_к \le 0$.

$$\Delta m=\frac{c_в m_в t_1+c_Л m_Л t_2}{\lambda_Л},\ t_к=0\ ^\circ C. \qquad (2)$$

Комментарий:

В случае 1 закон сохранения энергии имеет вид

$$c_в m_в\cdot(t_k-t_1)+c_л m_л\cdot(0-t_2)+c_в m_л\cdot(t_k-0)+m_л\cdot\lambda_л=0.$$

Случай 2:

$$c_в m_в\cdot(0-t_1)+c_л m_л\cdot(0-t_2)+\Delta m_л\cdot\lambda_л=0.$$