Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) По замкнутой трассе непрерывно едут автомобили и мотоциклы. Все мотоциклы имеют скорость v_1 = 100 км/ч, а все автомобили – скорость v_2 = 90 км/ч. Мимо неподвижного наблюдателя каждые 10 секунд проезжает мотоцикл, а каждые 12 секунд – автомобиль. Как соотносятся количества мотоциклов и автомобилей на трассе?

Решение

Как автомобили, так и мотоциклы разделены на трассе равными расстояниями, поскольку проезжают мимо наблюдателя через равные промежутки времени.

Можно представить себе, что мотоциклы и автомобили – неподвижны, тогда как наблюдатель движется мимо них со скоростями v_1 = 100 км/ч и v_2 = 90 км/ч, соответственно. Тогда ясно, что что расстояние между соседними мотоциклами - $l_1 = v_1 \cdot \Delta t_1$, где Δt_1 = 10 с – временной интервал между появлениями мотоциклов рядом с наблюдателем. Аналогично, для автомобилей $l_2 = v_2 \cdot \Delta t_2$. Получается, что v_1 = 100 км/ч = 27.(7) м/с, v_2 = 90 км/ч = 25 м/с, откуда l_1 = 277.8 м, l_2 = 300 м.

Пусть длина трассы равна L. Тогда $N_1 = L/l_1$, $N_2 = L/l_2$ – количества мотоциклов и автомобилей на трассе. Соответственно, отношение количества мотоциклов к количеству автомобилей –

$$N_1/N_2 = l_2/l_1 = 300/277.8 = 1.08\ ;\ N_2/N_1 = 0.926.$$

Можно без расчета значений l_1 и l_2 сразу написать, что

$$N_1/N_2 = l_2/l_1 = v_2 \cdot \Delta t_2/(v_1 \cdot \Delta t_1) = (90 \text{ км/ч}) \cdot (12 \text{ с})/(100 \text{ км/ч}) \cdot (10 \text{ с}) = 108/100 = 1.08.$$

Ответ: N_1/N_2 = 1.08.

Задание 2. (20 баллов) Двое приятелей собираются попасть из пункта ***A*** в пункт ***B***. Первый отправляется на велосипеде с постоянной скоростью v_1 = 18 км/час. Второй же вызывает такси. Такси отправляется из пункта ***B*** в тот же момент времени по той же дороге, со скоростью $v_Т$ = 30 км/час. Вызвавший такси решает идти навстречу пешком, со скоростью v_2 = 6 км/час. В момент встречи, такси его забирает и разворачивается в пункт В, двигаясь с той же скоростью $v_Т$. Выяснить, кто из приятелей попадёт в пункт В скорее.

Решение

Пусть расстояние между пунктами ***A*** и ***B*** равно L. Первый из приятелей, на велосипеде, проделает этот путь за время $t_1 = L/v_1 = L/(18 \text{ км/час})$.

Второй из приятелей идёт навстречу такси, их скорость сближения составляет $v_Т + v_2$ = 36 км/час. Это значит, что до встречи пройдёт время $t_{21} = L/(v_Т + v_2) = L/(36 \text{ км/час})$. За это время пешеход пройдёт путь $L_{21} = v_2 \cdot L/(v_Т + v_2) = L/6$ в направлении пункта **В.**

Для возвращения в пункт **В** такси со вторым из приятелей проделает путь $L_{22} = L - v_2 \cdot L/(v_Т + v_2) = v_Т \cdot L/(v_Т + v_2) = = 5L/6$ за время $t_{22} = v_Т \cdot L/(v_Т + v_2)/v_Т = L/(v_Т + v_2) = t_{21}$.

Таким образом, суммарное время перемещения второго приятеля в пункт **В** составит $t_2 = 2 \cdot t_{21} = 2 \cdot L/(v_Т + v_2) = L/(18 \text{ км/час}) = t_1$.

Ответ: Приятели достигнут пункта **В** одновременно.

Задание 3. (20 баллов) В теплоизолированном сосуде находится вода объёмом V при температуре T_1. В воду положили кубик льда массой $m_л$ при температуре T_2. Найти температуру системы T_k после установления равновесия. Плотность воды равна ρ_0, удельные теплоёмкости воды и льда равны соответственно $c_в$ и $c_л$, удельная теплота плавления льда равна $\lambda_л$. Известно, что лёд полностью растаял.

Решение:

$$|Q| = -c_Л m_Л t_2 + \lambda_Л m_Л + c_в m_Л t_k$$

$$|Q| = c_в m_в (t_1 - t_k)$$

$$m_в = V\rho_0$$

Из (1) и (2) ➔ $t_k = \frac{c_в V\rho_0 t_1 + c_Л m_Л t_2 - \lambda_Л m_Л}{c_в (m_л + V\rho_0)}$.

Задание 4. (20 баллов) В трех теплоизолированных сосудах находится по 1 литру воды, при температурах t_1 = 90 °C, t_2 = 60 °C и t_3 = 30 °C, соответственно. Из первого и третьего сосудов во второй переливают по 100 г воды, а после выравнивания температуры – переливают по 100 г воды из второго сосуда в первый и третий. Сколько раз нужно будет повторить всю процедуру для того, чтобы разность температур между 1-м и 3-м сосудами стала меньшей 30 °C? Считать, что теплоемкость воды $c_в$ от температуры не зависит.

Решение

Пусть m = (0.001 м³)·(1000 кг·м⁻³) = 1 кг – исходная масса воды в каждом из сосудов, Δm = 0.1 кг – переливаемая масса. Найдём температуру t, которая установится в сосуде 2 (том, где исходная температура – t_2 = 60 °C) после добавления туда порций воды Δm из 1-го и 3-го сосудов. По закону сохранения энергии в ходе теплообмена получится, что

$$m \cdot c_в \cdot (t - 60°C) + \Delta m \cdot c_в \cdot \left((t - 90°C) + (t - 30°C)\right) = 0,$$

после чего

$$t \cdot (m + 2\Delta m) = m \cdot 60°C + \Delta m \cdot 120°C = (m + 2\Delta m) \cdot 60°C \Rightarrow t = 60°C.$$

Таким образом, темпратура t_2 = 60 °C в сосуде 2 не изменяется. Отметим сразу, что эта температура не будет изменяться и на следующих шагах повторения процедуры, поскольку изменения температуры в сосудах 3 и 1 ($\pm\Delta t$) будут оставаться равными по модулю и противоположными по знаку. Тогда

$$m \cdot c_в \cdot (t - 60°C) + \Delta m \cdot c_в \cdot \left(\left(t - (90°C - \Delta t)\right) + \left(t - (30°C + \Delta t)\right)\right) =$$
$$= m \cdot c_в \cdot (t - 60°C) + \Delta m \cdot c_в \cdot (2t - 120°C) = 0 \Rightarrow t = 60°C.$$

Пусть $t_{1,\,n+1}$ – температура воды в сосуде 1 на (n+1)-м шаге процесса переливания, а именно – после того, как в этот сосуд возвращают массу Δm из сосуда 2. По закону сохранения энергии,

$$(m - \Delta m) \cdot c_в \cdot \left(t_{1,\,n+1} - t_{1,\,n}\right) + \Delta m \cdot c_в \cdot \left(t_{1,\,n+1} - 60°C\right) = 0,$$

откуда изменение температуры в сосуде 1 на шаге процесса переливания получается следующим:

$$t_{1,n+1} - t_{1,n} \equiv \Delta t_{1,n+1} = -\frac{\Delta m}{m} \cdot \left(t_{1,n} - 60°C\right).$$

Аналогично, в третьем сосуде

$$t_{3,n+1} - t_{3,n} \equiv \Delta t_{3,n+1} = -\frac{\Delta m}{m}\cdot\left(t_{3,n} - 60°C\right).$$

В частности, на 1-м шаге

$$t_{1,1} - t_{1,0} \equiv \Delta t_{1,1} = -\frac{\Delta m}{m}\cdot\left(t_{1,0} - 60°C\right) = -\frac{\Delta m}{m}\cdot\left(90°C - 60°C\right) = -\frac{\Delta m}{m}\cdot 30°C\ .$$

$$t_{3,1} - t_{3,0} \equiv \Delta t_{3,1} = -\frac{\Delta m}{m}\cdot\left(t_{3,0} - 60°C\right) = -\frac{\Delta m}{m}\cdot\left(30°C - 60°C\right) = +\frac{\Delta m}{m}\cdot 30°C\ .$$

Видно, что изменения в сосудах 1 и 3 температуры действительно равны по модулю и противоположны по знаку.

В дальнейшем, можно рассматривать следующие итерации процесса, напрямую пересчитывая температуры. Альтернативно, можно ввести температуры $t^*_{1,n} = t_{1,n} - 60°C$ и $t^*_{3,n} = t_{3,n} - 60°C$, для которых будут выполняться уравнения

$$\Delta t^*_{\nu,n+1} = -\frac{\Delta m}{m}\cdot t^*_{\nu,n}, \text{ где } \nu = 1, 3\ .$$

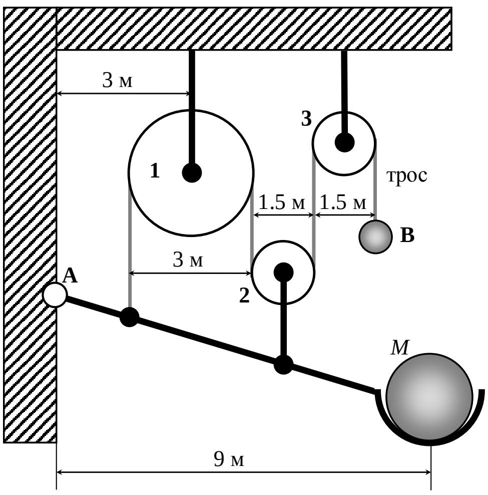
Эти уравнения снова можно использовать для прямого расчета температур на каждой итерации, либо получить решения в форме

$$t^*_{1,n+1} = \left(1 - \frac{\Delta m}{m}\right)^n \cdot 30°C,\ t^*_{3,n+1} = \left(1 - \frac{\Delta m}{m}\right)^n \cdot \left(-30°C\right).$$

Получается, что разность температур в 1 и 3 сосудах (совпадающая с разностью $t^*_{1,n} - t^*_{3,n}$) станет меньшей 30 °C (а именно 28.7°C) на 7-м шаге. Подстановка численных значений показывает, что номер шага *n* удовлетворяет соотношению $0.9^n < 0.5$.

Ответ: На 7-м шаге.

Задание 5. (20 баллов) Ковш, показанный на Рисунке, может свободно вращаться вокруг точки **A** (в вертикальной плоскости). В ковше лежит груз массой *M* = 200 кг. Определить вес груза, который нужно разместить в точке **B** для того, чтобы система блоков **1**, **2**, **3** и трос могли удержать ковш неподвижным? Все блоки закреплены жестко. Блоки и ковш считать невесомыми, трос – невесомым и нерастяжимым.



Решение

Ковш с грузом представляет собой рычаг, который будет в равновесии тогда, когда сумма произведений всех сил, приложенных к нему, на плечи этих сил будет равной нулю. При этом, силы нужно рассматривать с учетом знака (направления).

Обозначим силу натяжения троса через *T*. Эта сила должна совпадать с искомым весом груза B, чтобы тот оставался неподвижным. Отметим, что массу груза B в этой задаче искать не обязательно, ответом она тоже не будет.

Из Рисунка следует, что на расстоянии 1.5 м от точки A вдоль горизонтальной оси к ковшу приложена сила *T*, направленная вверх. На расстоянии 5.25 м от точки A приложена сила 2T, тоже направленная вверх. Будем считать направление «вверх» положительным, тогда уравнение баланса стержня примет вид

$$1.5 \cdot T + 5.25 \cdot 2T - 9 \cdot M \cdot g = 0 \Rightarrow$$

$$12 \cdot T = 9 \cdot M \cdot g = 17640\ H\ (\text{при } g = 9.8\ \text{м/с}^2);$$

$$T = 9 \cdot M \cdot g / 12 = 1470\ H.$$

При g = 10 м/с^2 T = 1500 Н.

Ответ: Вес груза **B** равен 1470 Н (1500 Н при g = 10 м/с^2).