

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (20 баллов) Двое приятелей собираются попасть из пункта А в пункт В. Первый отправляется на велосипеде с постоянной скоростью $v_1 = 18$ км/час. Второй же вызывает такси. Такси отправляется из пункта В в тот же момент времени по той же дороге, со скоростью $v_T = 30$ км/час. Вызвавший такси решает идти навстречу пешком, со скоростью $v_2 = 6$ км/час. В момент встречи, такси его забирает и разворачивается в пункт В, двигаясь с той же скоростью v_T . Выяснить, кто из приятелей попадёт в пункт В скорее.

Решение

Пусть расстояние между пунктами А и В равно L . Первый из приятелей, на велосипеде, проделает этот путь за время $t_1 = L/v_1 = L/(18 \text{ км/час})$.

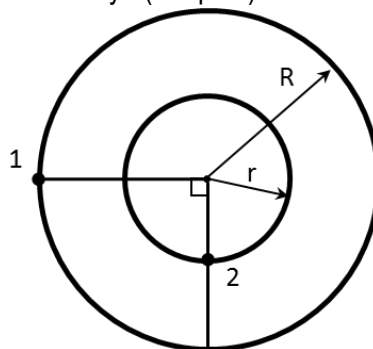
Второй из приятелей идёт навстречу такси, их скорость сближения составляет $v_T + v_2 = 36$ км/час. Это значит, что до встречи пройдёт время $t_{21} = L/(v_T + v_2) = L/(36 \text{ км/час})$. За это время пешеход пройдёт путь $L_{21} = v_2 \cdot L/(v_T + v_2) = L/6$ в направлении пункта В.

Для возвращения в пункт В такси со вторым из приятелей проделает путь $L_{22} = L - v_2 \cdot L/(v_T + v_2) = v_T \cdot L/(v_T + v_2) = 5L/6$ за время $t_{22} = v_T \cdot L/(v_T + v_2)/v_T = L/(v_T + v_2) = t_{21}$.

Таким образом, суммарное время перемещения второго приятеля в пункт В составит $t_2 = 2 \cdot t_{21} = 2 \cdot L/(v_T + v_2) = L/(18 \text{ км/час}) = t_1$.

Ответ: Приятели достигнут пункта В одновременно.

Задание 2. (20 баллов) Пусть существует круглый остров радиуса r . Вокруг острова, в диапазоне расстояний от r до R от его центра, находится вода, и эта вода движется с угловой скоростью ω . При перемещении на остров собственная скорость лодки направлена перпендикулярно течению. Найти значение скорости лодки U в стоячей воде, если лодка переместилась из точки 1 в точку 2 (см. рис.).



Решение

$\phi = 90^\circ$ из рисунка

$$\omega t = \varphi \rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$U = \frac{R-r}{t} = \frac{2(R-r)\omega}{\pi}$$

Задание 3. (20 баллов) В сосуде находится солёная вода (температура кристаллизации $t_0 = -2^\circ\text{C}$) массой $m_B = 1\text{ кг}$ при температуре $t_1 = 9^\circ\text{C}$. В сосуд добавляют лёд (получен в результате замерзания дистиллированной воды) массой $m_L = 500\text{ г}$ при температуре $t_2 = -41^\circ\text{C}$. Найти конечную температуру t_k системы и отношение n итоговой плотности жидкости к начальной. Плотность солёной воды относится к плотности дистиллированной как $11/10$. Удельная теплоёмкость воды $c_B = 4200\text{ Дж/кг}^\circ\text{C}$, теплоёмкость солёной воды – $c_C = 3900\text{ Дж/кг}^\circ\text{C}$, теплоёмкость льда – $c_L = 2200\text{ Дж/кг}^\circ\text{C}$, удельная теплота плавления льда $\lambda_L = 0,33\text{ МДж/кг}$.

Решение:

$$|Q| = c_L m_L (t_k - t_2)$$

$$|Q| = c_C m_B (t_1 - t_k)$$

$$\text{Из (1) и (2)} \Rightarrow t_k = \frac{c_C m_B t_1 + c_L m_L t_2}{c_C m_B + c_L m_L} = -2^\circ\text{C}$$

Температура $t_k < 0 \Rightarrow$ лёд не начнёт таять \Rightarrow плотность не изменится $\Rightarrow n = 1$.

Задание 4. (20 баллов) Считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $R = 384\,467\text{ км}$, совершая полный оборот за $27,32$ суток. На каком тогда расстоянии вращается, по круговой орбите, искусственный спутник Земли, имеющий скорость 266310 км/сутки ?

Решение

Будем считать Землю неподвижным источником гравитационного поля. Для того, чтобы материальная точка (Луна, искусственный спутник) могла находиться на круговой орбите в гравитационном поле Земли, её центробежное ускорение

$$a_{цб} = \frac{v^2}{R} \tag{1}$$

должно по модулю совпадать с «гравитационным» ускорением, направленным к Земле:

$$\frac{v^2}{R} = G \frac{M_0}{R^2}. \tag{2}$$

В формулах (1-2) v – скорость материальной точки, R – радиус круговой орбиты, M_0 – масса Земли, G – гравитационная постоянная. В данной задаче M_0 и G считаются неизвестными, скорость же Луны можно найти по формуле

$$v_L = \frac{2\pi R_L}{T_L} = \frac{2 \cdot 3,14159 \cdot (384467\text{ км})}{27,32\text{ сут}} = 88420\text{ км/сут}. \tag{3}$$

Из формулы (2) следует, что для тел, вращающихся вокруг Земли,

$$v^2 R = G M_0 = \text{const}, \tag{4}$$

так что

$$v_{\text{спутник}}^2 R_{\text{спутник}} = v_L^2 R_L \Rightarrow R_{\text{спутник}} = \frac{v_L^2}{v_{\text{спутник}}^2} R_L = \left(\frac{88420}{266310} \right)^2 \cdot (384467\text{ км}) = 42384\text{ км}, \tag{5}$$

Отметим, что период обращения такого спутника равен одним суткам.

Ответ: Спутник вращается на расстоянии 42384 км .

Задание 5. (20 баллов) В некоторой системе, соприкасаются два газовых потока. Один из потоков движется со скоростью v_1 , второй – со скоростью v_2 . Температуры потоков одинаковы, равны T . Считать, что количества частиц, переходящих из одного потока в другой через единицу площади их соприкосновения равны $n \cdot V_T/4$, где n – числовая плотность газа (количество молекул на единицу объёма), V_T – средняя арифметическая скорость теплового движения частиц, которую можно принять известной и не зависящей от скорости движения потоков ($V_T = (8 \cdot R \cdot T / (\pi \cdot M))^{1/2}$, где M – молярная масса газа, R – универсальная газовая постоянная). Частицы газа в обоих потоках имеют массу m . Оценить силу трения, действующую на единичную площадь соприкосновения потоков.

Решение

Общая форма второго закона Ньютона может быть записана через производную импульса по времени:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (4)$$

Это значит, что сила трения, действующая между соприкасающимися потоками, будет равна скорости изменения их импульсов в результате взаимодействия.

За единицу времени из первого потока во второй переходит $n \cdot V_T/4$ частиц, столько же – из второго потока в первый. Соответственно, первый поток передаст второму импульс $p_{1 \rightarrow 2}$, равный $m \cdot v_1 \cdot n \cdot V_T/4$, второй же поток передаст первому импульс $p_{2 \rightarrow 1} = m \cdot v_2 \cdot n \cdot V_T/4$.

Разность импульсов $(p_{1 \rightarrow 2} - p_{2 \rightarrow 1}) = m \cdot (v_1 - v_2) \cdot n \cdot V_T/4$ и будет силой трения, с которой первый поток действует на второй. Со стороны второго потока на первый действует противоположная сила $m \cdot (v_2 - v_1) \cdot n \cdot V_T/4$, в соответствии с 3-м законом Ньютона.

Ответ: Со стороны первого потока на второй действует сила трения $F = m \cdot (v_1 - v_2) \cdot n \cdot V_T/4$.