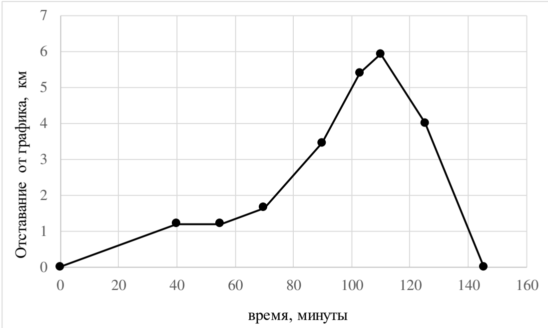
Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) **Лесничий на реке**



Направляясь в отдаленный бор, лесничий проходит на лодке три участка реки, а затем озеро, расположенное выше по течению. После недавних дождей, скорости течения на трех «речных» участках увеличились по сравнению с обычными значениями. На Рисунке показано отставание лодки от обычного графика движения, в зависимости от времени. Определить суммарную длину пути лесничего по реке и озеру, если скорость лодки относительно воды можно считать постоянной на всех участках, не зависящей ни от скорости течения, ни от дождей. Скорости течения в пределах каждого из участков реки считать постоянными, скорость течения в озере принять равной нулю. Рассмотреть возможность существования нескольких решений задачи. Точки, выделенные на Рисунке, имеют следующие координаты (время; отставание): (0 мин.; 0 км.), (40 мин.; 1.2 км), (55 мин.; 1.2 км), (70 мин.; 1.65 км), (103 мин.; 5.4 км), (110 мин.; 5.925 км), (125.4 мин.; 4 км), (145.4 мин.; 0 км).

Решение

Наклоны участков графика, показанного на Рисунке, соответствуют разностям скоростей фактического движения лесничего и движения в «обычных» условиях. Положения выделенных точек соответствуют тем моментам времени, в которые лодка переходит с одного участка реки на следующий, при фактическом «сегодняшнем» движении, либо по «обычному» плану.

Пусть v_1, v_2, v_3, v_4 – скорости «сегодняшнего» течения реки на участках 1, 2, 3 и на озере (участок 4), причем v_4 = 0 км/ч. Аналогично, v_{10}, v_{20}, v_{30}, v_{40} – скорости течения реки в «обычных» условиях, причём v_{40} = 0 км/ч. Эти скорости можно определить, рассматривая график «с конца»:

1. Участок 125.4 – 145.4 мин. Соответствует фактическому движению лодки по озеру в тот промежуток времени, когда в «обычных» условиях путешествие было бы уже завершено. Это значит, что модуль угла наклона здесь даёт собственную скорость лодки относительно воды:

$$V = \frac{4\text{ км}}{20\text{ мин}} = \frac{4\text{ км}}{1/3\text{ часа}} = 12\text{ км/ч}. \quad (1)$$

2. Участок 110 – 125.4 мин. Отрицательный наклон графика здесь означает, что лодка при фактическом движении «догоняет» план. Это возможно, только если «плановое» движение уже завершено. Таким образом, модуль угла наклона графика здесь даёт скорость фактического приближения лодки к финишу, с учетом скорости течения на 3-м участке:

$$V - v_3 = \frac{1.925\text{ км}}{15.4\text{ мин}} = \frac{1.925\text{ км км}}{0.25(6)\text{ часа}} = 7.5\text{ км/ч} \Rightarrow v_3 = V - 7.5\text{ км/ч} = 4.5\text{ км/ч}. \quad (2)$$

3. Участок 103 – 110 мин. Наклон графика здесь становится положительным, что можно интерпретировать единственным образом: «сегодняшняя» лодка остаётся на участке 3, тогда как в «обычное» время она двигалась бы по озеру. Можно это проверить:

$$v_3 - v_{40} = \frac{0.525\text{ км}}{7\text{ мин}} = \frac{0.525\text{ км}}{0.11(6)\text{ часа}} = 4.5\text{ км/ч, при том, что } v_{40} = 0. \quad (3)$$

Новой информации о скоростях течения не получено, однако **рассмотрение данного участка позволяет получить информацию, достаточную для определения положения точки на графике, координаты которой пропущены в условии задачи.** Обозначим искомые координаты через (x, y). Для определенности укажем, что $x \approx 90$ мин, $y \approx 3.5$ км. Правильной интерпретацией положения этой точки является следующая: в промежутке времени от x до 103 мин лодка фактически находилась на участке 2, тогда как в «обычное» время двигалась бы по озеру. Если так, то в момент времени t = 103 мин лодка входит на участок 3, на котором находится до момента 125.4 мин, двигаясь со скоростью $V - v_3$ = 7.5 км/час. Отсюда, длина участка 3:

$$L_3 = \frac{(125.4-103)}{60}\cdot 7.5 = 2.8 \text{ км.} \qquad (3)$$

Согласно условию задачи, в «обычный» день лодка двигалась бы по озеру с той же скоростью V = 12 км/час, что получена выше для «сегодняшнего» движения лодки. Это значит, что время прохождения озера должно составлять 20 минут, как в формуле (1). Выше показано, что в «обычный» день лодка завершает путь по озеру в момент времени t = 110 мин, так что начинать должна в момент t =90 мин. Этот момент как раз соответствует неизвестному значению x, а других подходящих точек на графике нет. Доказано, что ***x* = 90 мин**, **и это - момент достижения лодкой озера в «обычный» день**.

4. Рассмотрим начальные участки графика. В Таблице 1 приведены возможные интерпретации значений тангенса угла наклона этих участков. Индексы скоростей течения показывают, на каком из участков находилась бы лодка «сегодня» и в «обычный день» для каждой из строк Таблицы 1. Отметим, что других интерпретаций графика, при которых в «обычный» день лодка начинала бы движение по озеру в момент $t = x$ =90 мин, а «сегодняшние» скорости течения реки были бы выше «обычных» значений – не существует.

Таблица 1. Разности скоростей течения в «сегодняшних» и «обычных» условиях, в зависимости от интерпретации интервалов между точками графика

Интервал, мин.	Тангенс угла наклона, км/ч	Интерпретация 1	Интерпретация 2
0 – 40	1.8	$v_1 - v_{10}$	$v_1 - v_{10}$
40 – 55	0	$v_1 - v_{20}$	$v_1 - v_{20}$
55-70	1.8	$v_2 - v_{20}$	$v_1 - v_{30}$
70-90	((y-1.65)/20)·60	$v_2 - v_{30}$	$v_2 - v_{30}$
90-103	((5.4-y)/20)·60	$v_2 - v_{40}$	$v_2 - v_{40}$
103-110	4.5	$v_3 - v_{40}$	$v_3 - v_{40}$

Интерпретация 1 означает, что в «обычный» день лодка находится на участке 3 только на отрезке времени $t \in [70, 90]$, в течение 20 мин. Таким образом, «обычная» скорость течения на участке 3 даётся соотношением

$$L_3 = (V - v_{30})\cdot 20\text{ мин} \Rightarrow v_{30} = V - \frac{L_3}{(20/60)} = 12 - 2.8\cdot 3 = 3.6\text{ км/ч}. \qquad (4)$$

Теперь, вычитая 4-ю строку Таблицы 1 из 5-й строки, для Интерпретации 1 получаем

$$(5.4-y)/(13/60) - (y-1.65)/(20/60) = v_{30} = 3.6\text{ км/ч}. \quad (5)$$

Отсюда

$$y = \left(\frac{5.4}{13} + \frac{1.65}{20} - \frac{3.6}{60}\right)\cdot\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{20}\right)^{-1} = 3.45\text{ км}. \qquad (6)$$

Полученное значение может совпадать с фактическим положением точки на графике.

Интерпретация 2 предполагает, что в «обычный» день лодка находится на участке 3 в течение 35 мин., от момента t = 55 мин. до момента t = 90 мин. В этом случае

$$L_3 = (V - v_{30})\cdot 35\text{ мин} \Rightarrow v_{30} = V - \frac{L_3}{(35/60)} = 7.2\text{ км/ч}. \qquad (7)$$

Уравнение (5) должно оставаться справедливым, при замене значения скорости v_{30} на 7.2 км/ч. Тогда

$$y = \left(\frac{5.4}{13} + \frac{1.65}{20} - \frac{7.2}{60}\right)\cdot\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{20}\right)^{-1} = 2.977\text{ км}. \qquad (8)$$

Этот результат явно не соответствует графику, так что **Интерпретация 2 не верна**.

5. Длины первых двух участков реки

Для получения ответа задачи, ограничимся верной Интерпретацией 1. Зная точное значение y = 3.45 км, можно определить все значения скоростей участков реки из данных Таблицы 1 «снизу вверх»:

((y-1.65)/20)·60 = 5.4 км/ч $\Rightarrow v_2 = v_{30}$+5.4 км/ч = 9.0 км/ч;

$v_{20} = v_2 - 1.8$ км/ч = 7.2 км/ч;
$v_1 = v_{20} = 7.2$ км/ч;
$v_{10} = v_1 - 1.8$ км/ч = 5.4 км/ч.

Согласно Таблице 1, первый участок реки в «обычный» день лодка проходит за 40 мин. со скоростью $V - v_{10} = 6.6$ км/ч, что даёт

$$L_1 = 6.6 \cdot (40/60) = 4.4 \text{ км}. \quad (9)$$

Участок 2 лодка в «обычный» день проходит за 30 мин. со скоростью $V - v_{20} = 4.8$ км/ч, откуда

$$L_2 = 4.8 \cdot (30/60) = 2.4 \text{ км}. \quad (10)$$

Длина участка 3 уже определена выше, $L_3 = 2.8$ км. Длина пути по озеру L_4 даётся вертикальной координатой точки (125.4 мин.; 4 км), так что равна 4 км. Можно убедиться в том, что расчёт всех длин участков с использованием повышенных «сегодняшних» скоростей течения реки даст те же самые длины участков, что доказывает соответствие Интерпретации 1 всем условиям задачи.

6. Длина всего пути

Длина всего пути складывается из длин всех участков:

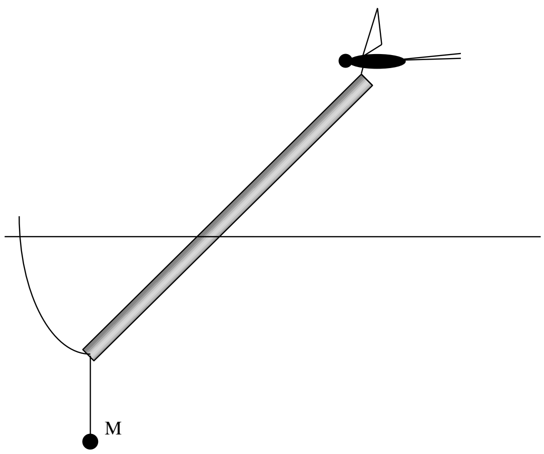
$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 13.6 \text{ км}. \quad (11)$$

Объяснить существование неподходящих интерпретаций графика (таких, как Интерпретация 2) можно следующим образом. График на Рисунке изначально был построен с использованием длин участков $L_1 - L_4$, так что существует Интерпретация 1, которая воспроизводит эти длины. В общем же случае, точки на графике могли бы описывать, например, движение лодки по двум разным рекам с различающимися длинами участков.

Ответ: длина пути лесничего равна 13.6 км.

Задание 2. (25 баллов) **Поплавок и подёнка**

Сразу после заброса на самый край цилиндрического поплавка садится подёнка, после чего поплавок остаётся неподвижным в положении, показанном на Рисунке. Известно, что объём поплавка составляет 1 см^3, а массы подёнки – в 9 раз меньше массы груза. Масса поплавка равномерно распределена вдоль его длины. Натяжением лески выше крепления к поплавку, как и поверхностным натяжением воды, можно пренебречь. Плотность воды принять равной 1 г/см^3. Найти границы диапазона масс подёнки, при которых поплавок, оставаясь в наклонном положении, будет выступать из воды больше, чем наполовину.



Решение

Пусть m – масса поплавка, L, S – длина и площадь поплавка, m_Π – масса подёнки. Обозначим длину подводной части поплавка через x, а плотность воды – через ρ. Теперь, масса воды, вытесняемая подводной частью поплавка, будет равна $\rho \cdot S \cdot x$, так что условие его плавания запишется в виде

$$\rho \cdot S \cdot x = m + M + m_\Pi.$$

Неподвижность поплавка в наклонном положении означает нулевую сумму моментов силы, приложенных к нему. С учетом того, что сила Архимеда приложена в середине подводной части поплавка и направлена вверх, уравнение баланса этих моментов относительно точки пересечения поплавка с поверхностью воды принимает вид

$$M \cdot x - \frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - (L - x) \cdot m_\Pi - \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot m = 0.$$

Альтернативно, можно рассмотреть баланс моментов относительно любой другой точки, например – точки крепления груза к поплавку. В последнем случае, получается уравнение

$$\frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - L \cdot m_\Pi - \frac{L}{2} \cdot m = 0.$$

Теперь, выражаем массу поплавка из условия плавания и подставляем результат в уравнение баланса моментов:

$$\frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - L \cdot m_\Pi - \frac{L}{2} \cdot \left(\rho \cdot S \cdot x - m_\Pi - M\right) = 0.$$

Если раскрыть скобки, а также выделить коэффициент $\rho \cdot S \cdot L$, равный массе поплавка, то получается квадратное уравнение

$$x^2 - Lx + \frac{L^2}{\rho SL} \cdot \left(M - m_\Pi\right) = 0$$

с решениями

$$x_{1,2} = \frac{L}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{M - m_\Pi}{\rho SL}}\right).$$

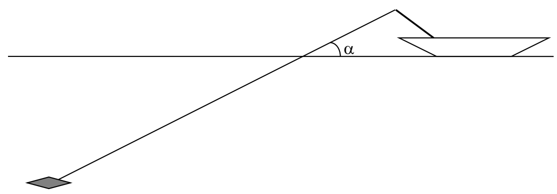
Здесь, произведение $S \cdot L$ равно объёму поплавка, то есть 1 см^3. С учётом плотности воды ρ·= 1 г/см^3, получается, что $\rho \cdot S \cdot L$= 1 г. Выразим массы груза и подёнки в единицах массы поплавка, равной 1 грамму. С учётом того, что M = 9·m_Π, получится

$$x_{1,2} = \frac{L}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 8 m_\Pi}\right) = \frac{L}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 32 \cdot m_\Pi}\right). \qquad (*)$$

По условию задачи, поплавок должен выступать над водой больше, чем на половину. Это значит, что $x < L/2$. Использование знака «–» в формуле (*) как раз даёт такие решения, при условии, что подкоренное выражение неотрицательно. Соответственно, масса подёнки должна принадлежать диапазону $0 \le m_\Pi < 1/32$.

Ответ: Масса подёнки должна удовлетворять неравенству $0 \le m_\Pi < 1/32$.

Задание 3. (25 баллов) **Лодка и блесна**



Медная блесна, закрепленная на нерастяжимом плетеном шнуре, движется следом за лодкой с постоянной скоростью. Шнур входит в воду под углом $\alpha = 30°$, как показано на Рисунке. Лодка начинает увеличивать скорость с постоянным ускорением a, равным 0.25 м/с^2. Каким станет в этот момент вертикальное ускорение блесны? Масса блесны равна 15 г. Плотность меди принять равной 8.92 г/см^3, плотность воды – 1.00 г/см^3, ускорение свободного падения – 9.8 м/с^2. Считать, что сила сопротивления воды пропорциональна квадрату скорости блесны.

Решение

До того, как лодка начала ускоряться, блесна двигалась с постоянной скоростью, так что сумма действовавших на неё сил равнялась нулю. В частности, сила тяжести была уравновешена силой Архимеда и проекцией силы натяжения шнура T на вертикальную ось:

$$T \cdot \sin\alpha = m' \cdot g. \qquad (1)$$

Здесь g – ускорение свободного падения, m' - эффективная масса блесны, учитывающая силу Архимеда. Найти m' можно следующим образом:

$$m' \cdot g = \left(m - \rho_{воды} \cdot V\right) \cdot g = \left(\rho_{меди} - \rho_{воды}\right) \cdot V \cdot g = \left(\rho_{меди} - \rho_{воды}\right) \cdot \frac{m}{\rho_{меди}} \cdot g$$
$$= \frac{\rho_{меди} - \rho_{воды}}{\rho_{меди}} \cdot m \cdot g \;\Rightarrow\; m' = \frac{\rho_{меди} - \rho_{воды}}{\rho_{меди}} \cdot m = 0.0133 \text{ кг}. \qquad (2)$$

В формуле (2) m и V – масса и объём блесны.

Проекция силы натяжения шнура на горизонтальную ось при постоянной скорости блесны уравновешена силой сопротивления воды F_C:

$$F_C = T \cdot \cos\alpha = \frac{m' \cdot g}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha = m' \cdot g \cdot \mathrm{ctg}(\alpha) = 0.226\ \text{Н}. \qquad (3)$$

Если сила F_C пропорциональна квадрату скорости блесны, то она не изменится в момент начала ускорения лодки, поскольку скорость блесны ещё не успеет увеличиться.

Для того, чтобы учесть ускорение лодки, перейдём в равноускоренную систему отсчёта, связанную с лодкой. В момент начала ускоренного движения лодки, блесна в этой новой системе отсчета будет неподвижной, а в дальнейшем начнёт движение по окружности, радиус которой совпадает с длиной шнура. В равноускоренной системе отсчёта на блесну действует сила инерции

$$F_И = a \cdot m = 0.25 \cdot 0.015 = 0.00375\ \text{Н}, \qquad (4)$$

направленная противоположно ускорению лодки. Кроме того, в такой системе существует и сила Архимеда, направленная противоположно силе инерции.

Направим горизонтальную ось x в сторону движения лодки. Сумма сил инерции и Архимеда, действующая вдоль оси x, будет считаться с использованием той же эффективной массы m', что введена в формуле (2):

$$(F_И + F_A) = -a \cdot m' = -0.25 \cdot 0.0133 = -0.00333\ \text{Н}. \qquad (5)$$

Знак «минус» учитывает направление этой силы.

Если модуль скорости блесны в равноускоренной системе отсчёта равен нулю, то нулю равно и центробежное ускорение, описывающее её движение по окружности на шнуре. Это значит, что изменившаяся сила натяжения шнура T' должна быть равна сумме проекций всех сил на направление «от лодки» вдоль шнура

$$T' = \left(\left|(F_И + F_A)_x\right| + |F_C|\right) \cdot \cos(\alpha) + m' g \cdot \sin(\alpha) = 0.264\ \text{Н}. \qquad (6)$$

Вертикальная составляющая действующей на блесну результирующей силы даётся формулой

$$F_y = T' \cdot \sin(\alpha) - m' g \cdot \cos(\alpha) = 0.00144\ \text{Н}, \qquad (7)$$

положительное значение силы здесь означает, что направлена она вверх. Вертикальная составляющая ускорения получается делением F_y на массу блесны:

$$a_y = F_y / m = 0.096\ \text{м/с}^2. \qquad (8)$$

При переходе из равноускоренной системы отсчёта в «неподвижную» систему, связанную с водой, полученная вертикальная компонента ускорения не изменится, так как ускорение лодки горизонтально.

Ответ: вертикальное ускорение блесны будет равным 0.096 м/с^2.

Задание 4. (25 баллов) **Электрический нагреватель охотника**

В холодный день охотник собирает самодельный плоский электрический нагреватель из нихромовой токопроводящей проволоки диаметром D = 1 мм с удельным сопротивлением $\rho \approx 1 \cdot 10^{-6}$ Ом*м. Из проволоки ему удалось изготовить кольцо и квадрат, причем квадрат вписан в кольцо, а вершины квадрата с помощью электрического контакта соединены с кольцом. Оставшимся куском нихромовой проволоки, длиной L=20 см, охотник замкнул диагональ квадрата. Источник ЭДС, напряжением E=10В, можно подключить только к вершинам квадрата. Определите суммарную электрическую мощность нагревателя для каждого варианта подключения.

Решение

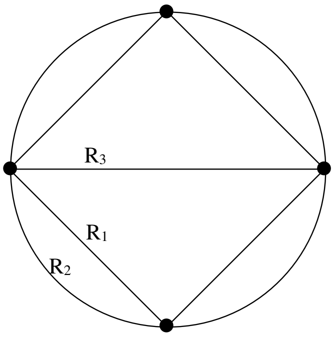


Рис. 1. Расположение отрезков проволоки в нагревателе

Источник ЭДС может быть подключен к вершинам квадрата тремя способами:
1. К соседним вершинам;
2. К противоположным вершинам, соединенным прямым отрезком проволоки.
3. К противоположным вершинам, между которыми прямого соединения нет.

Обозначим сопротивления участков нагревателя, как показано на Рисунке 1. Условие задачи позволяет вычислить эти сопротивления по формуле

$$R = \frac{\rho \cdot L}{S}, \qquad (1)$$

где L – длины участков. Получающиеся значения сопротивлений приведены в Таблице 1.

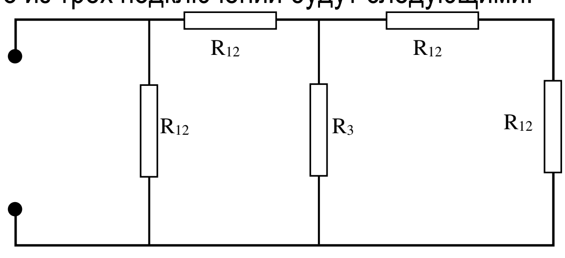
Таблица 1. Участки и сопротивления

Участки нагревателя	**Длина, м**		**R, Ом**
Диагональ	0.2	R_3	0.255
Сторона квадрата	0.14142136	R_1	0.180
Дуга круга	0.15707963	R_2	0.2

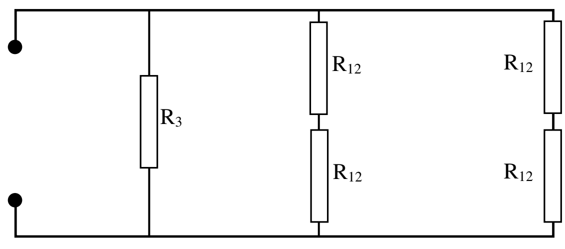
Отметим, что сопротивления R_1 и R_2 всегда будут «работать» параллельными парами, так что имеет смысл ввести сопротивление такой пары

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0.0948\ \text{Ом}\ . \qquad (2)$$

Эквивалентные схемы каждого из трех подключений будут следующими:



1



2

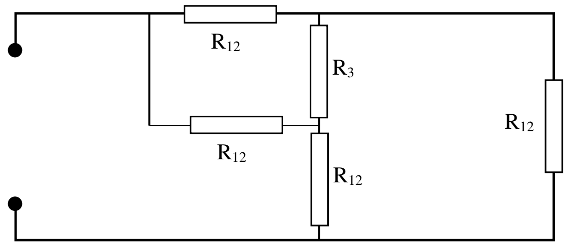


Рис. 2. Эквивалентные схемы подключений

В **Схеме 1** сопротивление R_3 параллельно сумме двух сопротивлений R_{12}, что даст эквивалентное сопротивление

$$R_{123} = \frac{2R_{12} \cdot R_3}{2R_{12} + R_3} = 0.109 \text{ Ом}. \quad (3)$$

Затем, в Схеме 1 параллельны сопротивления R_{12} и R_{123}, что даст полное эквивалентное сопротивление этой схемы

$$R_{1,\text{ экв}} = \frac{R_{12} \cdot \left(R_{12} + R_{123}\right)}{R_{12} + \left(R_{12} + R_{123}\right)} = 0.0646 \text{ Ом}. \quad (4)$$

Соответственно, суммарная мощность нагревателя составит

$$P_1 = \frac{U^2}{R_{1,\text{ экв}}} = \frac{100}{0.0508} = 1.55 \text{ кВт}. \quad (5)$$

В **Схеме 2** сопротивление R_3 параллельно сумме двух удвоенных сопротивлений R_{12}. Эквивалентное сопротивление можно рассчитать по формуле

$$\frac{1}{R_{2,\text{ экв}}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{2R_{12}} + \frac{1}{2R_{12}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{12}}. \quad (6)$$

Таким образом, полное эквивалентное сопротивление Схемы 2:

$$R_{2,\text{ экв}} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} = 0.0691 \text{ Ом}. \quad (7)$$

Суммарная мощность нагревателя в этом случае:

$$P_2 = \frac{U^2}{R_{2,\text{ экв}}} = \frac{100}{0.0542} = 1.45 \text{ кВт}. \quad (8)$$

В **Схеме 3** диагональная перемычка (с сопротивлением R_3) соединяет эквивалентные точки, в которых потенциалы равны. Соответственно, ток через R_3 равен нулю. Так что, эквивалентное сопротивление этой схемы даётся формулой:

$$R_{3,\text{ экв}} = \frac{2R_{12} \cdot 2R_{12}}{2R_{12} + 2R_{12}} = R_{12} = 0.0948 \text{ Ом}. \quad (9)$$

Суммарная мощность нагревателя теперь:

$$P_3 = \frac{U^2}{R_{3,\text{ экв}}} = \frac{100}{0.0744} = 1.06 \text{ кВт}. \quad (10)$$

Ответ: мощности нагревателя при трех включениях равны 1.55 кВт, 1.45 кВт и 1.06 кВт.