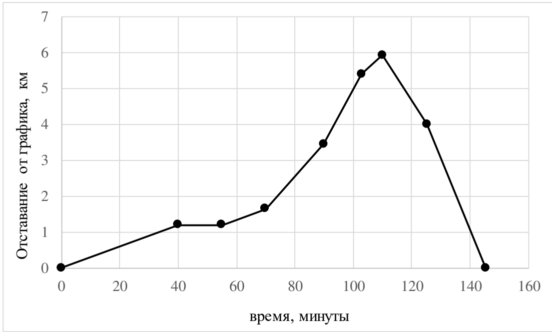
Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) **Лесничий на реке**



Направляясь в отдаленный бор, лесничий проходит на лодке три участка реки, а затем озеро, расположенное выше по течению. После недавних дождей, скорости течения на трех «речных» участках увеличились по сравнению с обычными значениями. На Рисунке показано отставание лодки от обычного графика движения, в зависимости от времени. Определить суммарную длину пути лесничего по реке и озеру, если скорость лодки относительно воды можно считать постоянной на всех участках, не зависящей ни от скорости течения, ни от дождей. Скорости течения в пределах каждого из участков реки считать постоянными, скорость течения в озере принять равной нулю. Рассмотреть возможность существования нескольких решений задачи. Точки, выделенные на Рисунке, имеют следующие координаты (время; отставание): (0 мин.; 0 км.), (40 мин.; 1.2 км), (55 мин.; 1.2 км), (70 мин.; 1.65 км), (103 мин.; 5.4 км), (110 мин.; 5.925 км), (125.4 мин.; 4 км), (145.4 мин.; 0 км).

Решение

Наклоны участков графика, показанного на Рисунке, соответствуют разностям скоростей фактического движения лесничего и движения в «обычных» условиях. Положения выделенных точек соответствуют тем моментам времени, в которые лодка переходит с одного участка реки на следующий, при фактическом «сегодняшнем» движении, либо по «обычному» плану.

Пусть v_1, v_2, v_3, v_4 – скорости «сегодняшнего» течения реки на участках 1, 2, 3 и на озере (участок 4), причем $v_4 = 0$ км/ч. Аналогично, v_{10}, v_{20}, v_{30}, v_{40} – скорости течения реки в «обычных» условиях, причём $v_{40} = 0$ км/ч. Эти скорости можно определить, рассматривая график «с конца»:

1. Участок 125.4 – 145.4 мин. Соответствует фактическому движению лодки по озеру в тот промежуток времени, когда в «обычных» условиях путешествие было бы уже завершено. Это значит, что модуль угла наклона здесь даёт собственную скорость лодки относительно воды:

$$V = \frac{4\ \text{км}}{20\ \text{мин}} = \frac{4\ \text{км}}{1/3\ \text{часа}} = 12\ \text{км/ч}\,. \quad (1)$$

2. Участок 110 – 125.4 мин. Отрицательный наклон графика здесь означает, что лодка при фактическом движении «догоняет» план. Это возможно, только если «плановое» движение уже завершено. Таким образом, модуль угла наклона графика здесь даёт скорость фактического приближения лодки к финишу, с учетом скорости течения на 3-м участке:

$$V - v_3 = \frac{1.925\ \text{км}}{15.4\ \text{мин}} = \frac{1.925\ \text{км км}}{0.25(6)\ \text{часа}} = 7.5\ \text{км/ч} \Rightarrow v_3 = V - 7.5\ \text{км/ч} = 4.5\ \text{км/ч}\,. \quad (2)$$

3. Участок 103 – 110 мин. Наклон графика здесь становится положительным, что можно интерпретировать единственным образом: «сегодняшняя» лодка остаётся на участке 3, тогда как в «обычное» время она двигалась бы по озеру. Можно это проверить:

$$v_3 - v_{40} = \frac{0.525\ \text{км}}{7\ \text{мин}} = \frac{0.525\ \text{км}}{0.11(6)\ \text{часа}} = 4.5\ \text{км/ч, при том, что } v_{40} = 0\,. \quad (3)$$

Новой информации о скоростях течения не получено, однако **рассмотрение данного участка позволяет получить информацию, достаточную для определения положения точки на графике, координаты которой пропущены в условии задачи.** Обозначим искомые координаты через (x, y). Для определенности укажем, что $x \approx 90$ мин, $y \approx 3.5$ км. Правильной интерпретацией положения этой точки является следующая: в промежутке времени от x до 103 мин лодка фактически находилась на участке 2, тогда как в «обычное» время двигалась бы по озеру. Если так, то в момент времени t = 103 мин лодка входит на участок 3, на котором находится до момента 125.4 мин, двигаясь со скоростью $V - v_3$ = 7.5 км/час. Отсюда, длина участка 3:

$$L_3 = \frac{(125.4 - 103)}{60} \cdot 7.5 = 2.8 \text{ км.} \qquad (3)$$

Согласно условию задачи, в «обычный» день лодка двигалась бы по озеру с той же скоростью V = 12 км/час, что получена выше для «сегодняшнего» движения лодки. Это значит, что время прохождения озера должно составлять 20 минут, как в формуле (1). Выше показано, что в «обычный» день лодка завершает путь по озеру в момент времени t = 110 мин, так что начинать должна в момент t =90 мин. Этот момент как раз соответствует неизвестному значению x, а других подходящих точек на графике нет. Доказано, что ***x* = 90 мин, и это - момент достижения лодкой озера в «обычный» день**.

4. Рассмотрим начальные участки графика. В Таблице 1 приведены возможные интерпретации значений тангенса угла наклона этих участков. Индексы скоростей течения показывают, на каком из участков находилась бы лодка «сегодня» и в «обычный день» для каждой из строк Таблицы 1. Отметим, что других интерпретаций графика, при которых в «обычный» день лодка начинала бы движение по озеру в момент $t = x$ =90 мин, а «сегодняшние» скорости течения реки были бы выше «обычных» значений – не существует.

Таблица 1. Разности скоростей течения в «сегодняшних» и «обычных» условиях, в зависимости от интерпретации интервалов между точками графика

Интервал, мин.	Тангенс угла наклона, км/ч	Интерпретация 1	Интерпретация 2
0 – 40	1.8	$v_1 - v_{10}$	$v_1 - v_{10}$
40 – 55	0	$v_1 - v_{20}$	$v_1 - v_{20}$
55-70	1.8	$v_2 - v_{20}$	$v_1 - v_{30}$
70-90	((y-1.65)/20)·60	$v_2 - v_{30}$	$v_2 - v_{30}$
90-103	((5.4-y)/20)·60	$v_2 - v_{40}$	$v_2 - v_{40}$
103-110	4.5	$v_3 - v_{40}$	$v_3 - v_{40}$

Интерпретация 1 означает, что в «обычный» день лодка находится на участке 3 только на отрезке времени $t \in [70, 90]$, в течение 20 мин. Таким образом, «обычная» скорость течения на участке 3 даётся соотношением

$$L_3 = (V - v_{30}) \cdot 20 \text{ мин} \Rightarrow v_{30} = V - \frac{L_3}{(20/60)} = 12 - 2.8 \cdot 3 = 3.6 \text{ км/ч}. \qquad (4)$$

Теперь, вычитая 4-ю строку Таблицы 1 из 5-й строки, для Интерпретации 1 получаем

$$(5.4 - y)/(13/60) - (y - 1.65)/(20/60) = v_{30} = 3.6 \text{ км/ч}. \quad (5)$$

Отсюда

$$y = \left(\frac{5.4}{13} + \frac{1.65}{20} - \frac{3.6}{60}\right) \cdot \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{20}\right)^{-1} = 3.45 \text{ км}. \qquad (6)$$

Полученное значение может совпадать с фактическим положением точки на графике.

Интерпретация 2 предполагает, что в «обычный» день лодка находится на участке 3 в течение 35 мин., от момента t = 55 мин. до момента t = 90 мин. В этом случае

$$L_3 = (V - v_{30}) \cdot 35 \text{ мин} \Rightarrow v_{30} = V - \frac{L_3}{(35/60)} = 7.2 \text{ км/ч}. \qquad (7)$$

Уравнение (5) должно оставаться справедливым, при замене значения скорости v_{30} на 7.2 км/ч. Тогда

$$y = \left(\frac{5.4}{13} + \frac{1.65}{20} - \frac{7.2}{60}\right) \cdot \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{20}\right)^{-1} = 2.977 \text{ км}. \qquad (8)$$

Этот результат явно не соответствует графику, так что **Интерпретация 2 не верна**.

5. Длины первых двух участков реки

Для получения ответа задачи, ограничимся верной Интерпретацией 1. Зная точное значение y = 3.45 км, можно определить все значения скоростей течения на участках реки из данных Таблицы 1 «снизу вверх»:

$((y-1.65)/20)\cdot 60 = 5.4$ км/ч $\Rightarrow v_2 = v_{30}+5.4$ км/ч $= 9.0$ км/ч;

$v_{20} = v_2 - 1.8$ км/ч $= 7.2$ км/ч;

$v_1 = v_{20} = 7.2$ км/ч;

$v_{10} = v_1 - 1.8$ км/ч $= 5.4$ км/ч.

Согласно Таблице 1, первый участок реки в «обычный» день лодка проходит за 40 мин. со скоростью $V - v_{10} = 6.6$ км/ч, что даёт

$$L_1 = 6.6\cdot(40/60) = 4.4\ \text{км}. \quad (9)$$

Участок 2 лодка в «обычный» день проходит за 30 мин. со скоростью $V - v_{20} = 4.8$ км/ч, откуда

$$L_2 = 4.8\cdot(30/60) = 2.4\ \text{км}. \quad (10)$$

Длина участка 3 уже определена выше, $L_3 = 2.8$ км. Длина пути по озеру L_4 даётся вертикальной координатой точки (125.4 мин.; 4 км), так что равна 4 км. Можно убедиться в том, что расчёт всех длин участков с использованием повышенных «сегодняшних» скоростей течения реки даст те же самые длины участков, что доказывает соответствие Интерпретации 1 всем условиям задачи.

6. Длина всего пути

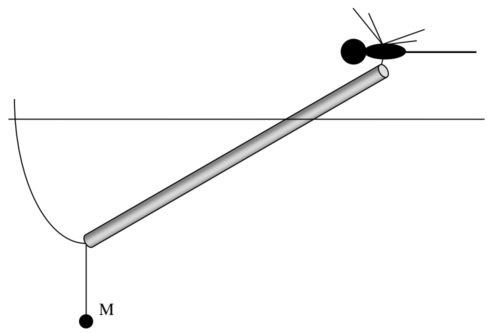
Длина всего пути складывается из длин всех участков:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 13.6\ \text{км}. \qquad (11)$$

Объяснить существование неподходящих интерпретаций графика (таких, как Интерпретация 2) можно следующим образом. График на Рисунке изначально был построен с использованием длин участков $L_1 - L_4$, так что существует Интерпретация 1, которая воспроизводит эти длины. В общем же случае, точки на графике могли бы описывать, например, движение лодки по двум разным рекам с различающимися длинами участков.

Ответ: длина пути лесничего равна 13.6 км.

Задание 2. (25 баллов) **Стрекоза и поплавок**



Сразу после заброса на самый край цилиндрического поплавка садится стрекоза, после чего поплавок остаётся неподвижным в положении, показанном на Рисунке. Известно, что объём поплавка составляет 2 см^3, а массы поплавка и груза совпадают. Масса поплавка равномерно распределена вдоль его длины. Натяжением лески выше крепления к поплавку, как и поверхностным натяжением воды, можно пренебречь. Плотность воды принять равной 1 г/см^3. Найти максимально возможную массу стрекозы, а также минимально возможные ненулевые массы поплавка и груза, при которых решения задачи имеют физический смысл, соответствующий Рисунку.

Решение

Пусть m – масса поплавка, L, S – длина и площадь поплавка, m_C – масса стрекозы. Также, обозначим длину подводной части поплавка через x, а плотность воды – через ρ. Теперь, масса воды, вытесняемая подводной частью поплавка, будет равна $\rho \cdot S \cdot x$, так что условие его плавания запишется в виде

$$\rho \cdot S \cdot x = m + M + m_C,$$

где M, m – массы груза и поплавка. В дальнейшем полагаем $m = M$, так что

$$\rho \cdot S \cdot x = 2M + m_C,$$

Неподвижность поплавка в наклонном положении означает, что скомпенсированы моменты действующих на него сил. С учетом того, что сила Архимеда приложена в середине подводной части поплавка и направлена вверх, уравнение баланса моментов сил относительно точки пересечения поплавка с поверхностью воды принимает вид

$$M \cdot x - \frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - (L - x) \cdot m_C - \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot m = 0.$$

Альтернативно, можно рассмотреть баланс моментов относительно любой другой точки, например – точки крепления груза к поплавку. В последнем случае, получается уравнение

$$\frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - L \cdot m_C - \frac{L}{2} \cdot m = 0.$$

Теперь, выражаем массу стрекозы из условия плавания и подставляем результат в уравнение баланса моментов:

$$\frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - L \cdot (\rho \cdot S \cdot x - m - M) - \frac{L}{2} \cdot m = 0.$$

Если раскрыть скобки, а также выделить коэффициент $\rho \cdot S \cdot L$, равный массе поплавка, то получается квадратное уравнение

$$x^2 - 2Lx + \frac{2L^2}{\rho SL} \cdot \left(M + \frac{m}{2}\right) = 0,$$

с решениями

$$x_{1,2} = L \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2M + m}{\rho SL}}\right).$$

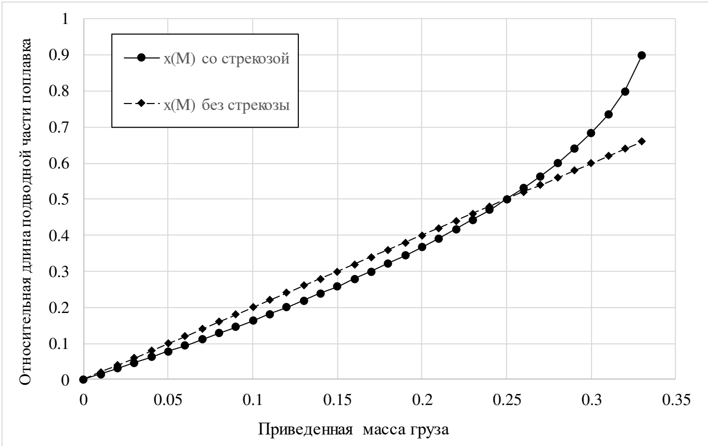
Физическому смыслу задачи удовлетворяет только решение с «минусом», поскольку $x \le L$. В случае $M = m$ это решение принимает более простой вид

$$x(M, m_C) = L \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3M}{\rho SL}}\right). \qquad (*)$$

Для выяснения особенностей полученного решения учтём, что при заданной массе груза M увеличение массы стрекозы m_C всегда будет приводить к увеличению $x(M, m_C)$. При нулевой массе стрекозы условие плавания поплавка будет иметь вид

$$\frac{x(M)}{L}=\frac{1}{\rho\cdot S\cdot L}(m+M)=\frac{2M}{\rho\cdot S\cdot L}. \qquad (**)$$

На следующем рисунке значения x, задаваемые уравнениями (*) и (**), сопоставлены между собой. Для обезразмеривания данных, величины x выражены в единицах L, а масса груза – в единицах $\rho\cdot S\cdot L$.



Из приведенных графиков видно, что существует область значений M, при которых значения x без стрекозы должны быть больше, чем со стрекозой. В этой области масса стрекозы должна была бы быть отрицательной, что не соответствует постановке задачи. Видно, что масса стрекозы становится положительной только при $M > 0.25\cdot\rho\cdot S\cdot L$. Это и есть минимально возможная масса груза, обеспечивающая ненулевое решение задачи. Строго, это решение получается приравниванием значений x, задаваемых уравнениями (*) и (**):

$$\frac{2M}{\rho\cdot S\cdot L}=\left(1\pm\sqrt{1-\frac{3M}{\rho SL}}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\frac{2M}{\rho\cdot S\cdot L}-1\right)^2=1-\frac{3M}{\rho SL}\Rightarrow M_1=0, M_2=\frac{1}{4}\cdot\rho SL.$$

С другой стороны, максимально возможное значение x – это длина поплавка L. Такой результат получается тогда, когда

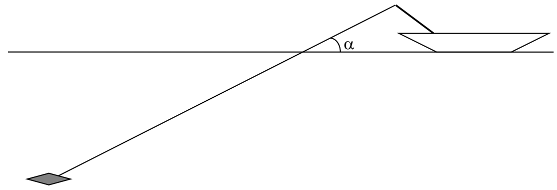
$$M_{\max}=\frac{1}{3}\cdot\rho SL.$$

При такой массе груза из условия плавания поплавка следует максимальная масса стрекозы

$$m_{C,\max}=\frac{1}{3}\cdot\rho SL=\frac{2}{3}\text{ г}.$$

Ответ: Масса груза должна быть большей 0.5 г, максимальная масса стрекозы равна 2/3 г.

Задание 3. (25 баллов) **Лодка и блесна**



Медная блесна, закрепленная на нерастяжимом плетеном шнуре, движется следом за лодкой с постоянной скоростью. Шнур входит в воду под углом $\alpha = 30°$, как показано на Рисунке. Лодка начинает увеличивать скорость с постоянным ускорением a, равным 0.25 м/с^2. Каким станет в этот момент вертикальное ускорение блесны? Масса блесны равна 15 г. Плотность меди принять равной 8.92 г/см^3, плотность воды – 1.00 г/см^3, ускорение свободного падения – 9.8 м/с^2. Считать, что сила сопротивления воды пропорциональна квадрату скорости блесны.

Решение

До того, как лодка начала ускоряться, блесна двигалась с постоянной скоростью, так что сумма действовавших на неё сил равнялась нулю. В частности, сила тяжести была уравновешена силой Архимеда и проекцией силы натяжения шнура T на вертикальную ось:

$$T \cdot \sin\alpha = m' \cdot g\ . \qquad (1)$$

Здесь g – ускорение свободного падения, m' - эффективная масса блесны, учитывающая силу Архимеда. Найти m' можно следующим образом:

$$m' \cdot g = \left(m - \rho_{воды} \cdot V\right) \cdot g = \left(\rho_{меди} - \rho_{воды}\right) \cdot V \cdot g = \left(\rho_{меди} - \rho_{воды}\right) \cdot \frac{m}{\rho_{меди}} \cdot g$$
$$= \frac{\rho_{меди} - \rho_{воды}}{\rho_{меди}} \cdot m \cdot g \ \Rightarrow\ m' = \frac{\rho_{меди} - \rho_{воды}}{\rho_{меди}} \cdot m = 0.0133\ \text{кг}. \qquad (2)$$

В формуле (2) m и V – масса и объём блесны.

Проекция силы натяжения шнура на горизонтальную ось при постоянной скорости блесны уравновешена силой сопротивления воды F_C:

$$F_C = T \cdot \cos\alpha = \frac{m' \cdot g}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha = m' \cdot g \cdot \text{ctg}\left(\alpha\right) = 0.226\ \text{Н}\ . \qquad (3)$$

Если сила F_C пропорциональна квадрату скорости блесны, то она не изменится в момент начала ускорения лодки, поскольку скорость блесны ещё не успеет увеличиться.

Для того, чтобы учесть ускорение лодки, перейдём в равноускоренную систему отсчёта, связанную с лодкой. В момент начала ускоренного движения лодки, блесна в этой новой системе отсчета будет неподвижной, а в дальнейшем начнёт движение по окружности, радиус которой совпадает с длиной шнура. В равноускоренной системе отсчёта на блесну действует сила инерции

$$F_И = a \cdot m = 0.25 \cdot 0.015 = 0.00375\ \text{Н}, \qquad (4)$$

направленная противоположно ускорению лодки. Кроме того, в такой системе существует и сила Архимеда, направленная противоположно силе инерции.

Направим горизонтальную ось x в сторону движения лодки. Сумма сил инерции и Архимеда, действующая вдоль оси x, будет считаться с использованием той же эффективной массы m', что введена в формуле (2):

$$\left(F_И + F_A\right) = -a \cdot m' = -0.25 \cdot 0.0133 = -0.00333\ \text{Н}. \qquad (5)$$

Знак «минус» учитывает направление этой силы.

Если модуль скорости блесны в равноускоренной системе отсчёта равен нулю, то нулю равно и центробежное ускорение, описывающее её движение по окружности на шнуре. Это значит, что изменившаяся сила натяжения шнура T' должна быть равна сумме проекций всех сил на направление «от лодки» вдоль шнура

$$T' = \left(\left|\left(F_И + F_A\right)_x\right| + \left|F_C\right|\right) \cdot \cos\left(\alpha\right) + m' g \cdot \sin\left(\alpha\right) = 0.264\ \text{Н}\ . \qquad (6)$$

Вертикальная составляющая действующей на блесну результирующей силы даётся формулой

$$F_y = T' \cdot \sin(\alpha) - m' g \cdot \cos(\alpha) = 0.00144 \text{ Н}, \quad (7)$$

положительное значение силы здесь означает, что направлена она вверх. Вертикальная составляющая ускорения получается делением F_y на массу блесны:

$$a_y = F_y / m = 0.096 \text{ м/с}^2. \quad (8)$$

При переходе из равноускоренной системы отсчёта в «неподвижную» систему, связанную с водой, полученная вертикальная компонента ускорения не изменится, так как ускорение лодки горизонтально.

Ответ: вертикальное ускорение блесны будет равным 0.096 м/с^2.

Ответ: вертикальное ускорение блесны будет равным 0.096 м/с^2.

Задание 4. (25 баллов) **Электрический нагреватель охотника**

В холодный день охотник собирает самодельный плоский электрический нагреватель из нихромовой токопроводящей проволоки диаметром D = 1 мм с удельным сопротивлением $\rho \approx 1*10^{-6}$ Ом*м. Из проволоки ему удалось изготовить кольцо и квадрат, причем квадрат вписан в кольцо, а вершины квадрата с помощью электрического контакта соединены с кольцом. Оставшимся куском нихромовой проволоки, длиной L=20 см, охотник замкнул диагональ квадрата. Источник ЭДС, напряжением E=10В, можно подключить только к вершинам квадрата.

Определите:

1.Суммарную электрическую мощность нагревателя для каждого варианта подключения?

2.При каком из подключений и во сколько раз будет выше минимальная температура, существующая внутри нагревателя?

Примечание: разность между фактической температурой и температурой окружающей среды в каждой из точек внутри нагревателя пропорциональна мощности, выделяющейся в ближайшем из проводников на единице его длины, а также уменьшается в 2 раза при удалении от этого проводника на каждые 3 см.

Решение

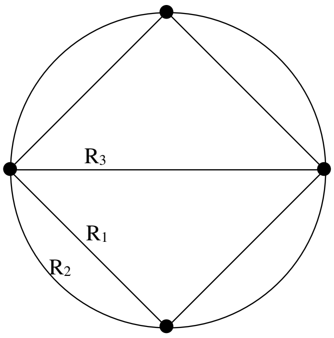


Рис. 1. Расположение отрезков проволоки в нагревателе

Источник ЭДС может быть подключен к вершинам квадрата тремя способами:

1. К соседним вершинам;
2. К противоположным вершинам, соединенным прямым отрезком проволоки.
3. К противоположным вершинам, между которыми прямого соединения нет.

Обозначим сопротивления участков нагревателя, как показано на Рисунке 1. Условие задачи позволяет вычислить эти сопротивления по формуле

$$R = \frac{\rho \cdot L}{S}, \qquad (1)$$

где L – длины участков. Получающиеся значения сопротивлений приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Участки и сопротивления

Участки нагревателя	**Длина, м**		**R, Ом**
Диагональ	0.2	$\mathbf{R_3}$	0.255
Сторона квадрата	0.14142136	$\mathbf{R_1}$	0.180
Дуга круга	0.15707963	$\mathbf{R_2}$	0.2

Отметим, что сопротивления R_1 и R_2 всегда будут «работать» параллельными парами, так что имеет смысл ввести сопротивление такой пары

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0.0948\ \text{Ом}\ . \qquad (2)$$

Эквивалентные схемы каждого из трех подключений будут следующими:

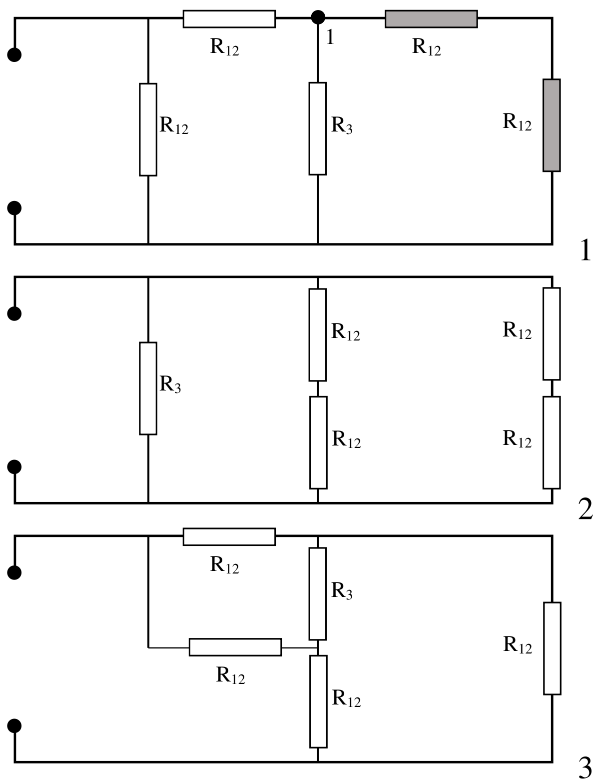


Рис. 2. Эквивалентные схемы подключений

В **Схеме 1** сопротивление R_3 параллельно сумме двух сопротивлений R_{12}, что даст эквивалентное сопротивление

$$R_{123} = \frac{2R_{12} \cdot R_3}{2R_{12} + R_3} = 0.109 \text{ Ом}. \qquad (3)$$

Затем, в Схеме 1 параллельны сопротивления R_{12} и R_{123}, что даст полное эквивалентное сопротивление этой схемы

$$R_{1,\text{ экв}} = \frac{R_{12} \cdot \left(R_{12} + R_{123}\right)}{R_{12} + \left(R_{12} + R_{123}\right)} = 0.0646 \text{ Ом}. \qquad (4)$$

Соответственно, суммарная мощность нагревателя составит

$$P_1 = \frac{U^2}{R_{1,\text{ экв}}} = \frac{100}{0.0508} = 1.55 \text{ кВт}. \qquad (5)$$

В **Схеме 2** сопротивление R_3 параллельно сумме двух удвоенных сопротивлений R_{12}. Эквивалентное сопротивление можно рассчитать по формуле

$$\frac{1}{R_{2,\text{ экв}}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{2R_{12}} + \frac{1}{2R_{12}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{12}}. \qquad (6)$$

Таким образом, полное эквивалентное сопротивление Схемы 2:

$$R_{2,\text{ экв}} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} = 0.0691 \text{ Ом}. \qquad (7)$$

Суммарная мощность нагревателя в этом случае:

$$P_2 = \frac{U^2}{R_{2,\text{ экв}}} = \frac{100}{0.0542} = 1.45 \text{ кВт}. \qquad (8)$$

В **Схеме 3** диагональная перемычка (с сопротивлением R_3) соединяет эквивалентные точки, в которых потенциалы равны. Соответственно, ток через R_3 равен нулю. Так что, эквивалентное сопротивление этой схемы даётся формулой:

$$R_{3,\text{ экв}} = \frac{2R_{12} \cdot 2R_{12}}{2R_{12} + 2R_{12}} = R_{12} = 0.0948 \text{ Ом}. \qquad (9)$$

Суммарная мощность нагревателя теперь:

$$P_3 = \frac{U^2}{R_{3,\,\text{экв}}} = \frac{100}{0.0744} = 1.06\ \text{кВт}\,. \qquad (10)$$

Минимальные температуры внутри нагревателя

Согласно условию задачи, температура точек внутри нагревателя падают с увеличением расстояния до ближайшего проводника. Таким образом, локальные минимумы температуры будут достигаться в точках, равноудаленных от двух или нескольких проводников. Эти точки показаны на Рисунке 2.

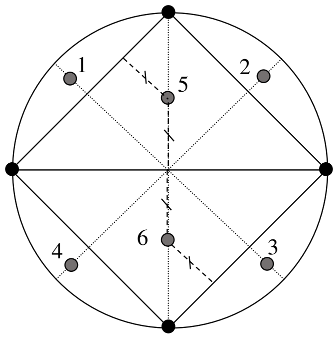


Рис. 2. Положения локальных минимумов температуры при подключениях питания по схемам 1 и 2.

На Рисунке 2, точки 1-4 удалены от ближайших к ним проводников на расстояния

$$x_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2\cdot\sqrt{2}}\right) = \frac{L}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.46\ \text{см}\,, \qquad (11)$$

а точки 5 и 6 – на расстояния

$$x_2 = \frac{L}{2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)} = 4.14\ \text{см}\,. \qquad (12)$$

Для получения мощностей, выделяемых на единицу длины проводников, **рассмотрим сначала Схему 2**, как самую симметричную. В этой схеме, на каждом из сопротивлений R_{12} падает напряжение $U/2$. Соответственно, такие же напряжения падают и на параллельных сопротивлениях R_1 и R_2, показанных на Рисунке 1. Это означает, что на каждом из сопротивлений R_1 выделится следующая мощность P_1:

$$P_1 = \frac{1}{R_1}\cdot\left(\frac{U}{2}\right)^2 = \frac{S}{\rho L_1}\cdot\left(\frac{U}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}\cdot S}{\rho L}\cdot\frac{U^2}{4}. \qquad (13)$$

На единице длины этого проводника будет выделяться удельная мощность

$$p_1 = \frac{P_1}{L_1} = \frac{\sqrt{2}\cdot P_1}{L} = \frac{S}{\rho L}\cdot\frac{U^2}{2}\,. \qquad (14)$$

Аналогичным образом, на единице длины каждой из четвертей окружности, образующих сопротивления R_2, будут выделяться удельные мощности

$$p_2 = \frac{P_2}{L_2} = \frac{S}{\rho}\cdot\left(\frac{U}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\pi L}{4}\right)^{-2} = \frac{4S}{\pi^2\rho}U^2 = \frac{8}{\pi^2}\cdot p_1\,. \qquad (15)$$

На единице длины диагональной перемычки в Схеме 2 выделится удельная мощность

$$p_3 = \frac{P_3}{L} = \frac{S}{\rho L^2}\cdot U^2 = 2\cdot p_1\,. \qquad (16)$$

Температуры внутри нагревателя при подключении по Схеме 2

Температуры внутри нагревателя рассмотрим в форме разностей между абсолютными температурами T и температурой окружающей среды T_0. Согласно условию задачи, эти разности будут пропорциональны удельным мощностям, выделяющимся в ближайшем проводнике, а также понижаться в 2 раза при удалении от проводника на каждые 3 см.

Отметим ещё, что для каждой из схем подключения нужно найти минимум температуры. Отсюда следует, что в точках, равноудаленных от двух (или нескольких) проводников с разными токами, нужно выбирать меньшую из температур, задаваемых расстояниями до каждого из проводников. Действительно, малое смещение из такой точки в сторону более «холодного» проводника сделает его единственным ближайшим, так что приведёт к минимуму температуры.

При подключении по Схеме 2, все точки 1-4 эквивалентны между собой, как и точки 5-6. В точках 1-4, локальные минимумы температуры будут определяться мощностями p_2 и расстояниями x_1:

$$\Delta T_{\min}\left(1-4, \text{схема } 2\right) \propto p_2 \cdot 2^{-\frac{x_1}{3}} = \frac{8}{\pi^2} \cdot 2^{-\frac{x_1}{3}} \cdot p_1 = 0.578 \cdot p_1. \qquad (17)$$

Заменяя «пропорциональность» умножением на константу, получаем

$$\Delta T_{\min}\left(1-4, \text{схема } 2\right) = 0.578 \cdot \mathrm{const} \cdot p_1. \qquad (18)$$

Константа const будет неизменной при расчете всех разностей температур, так что ниже будем выражать такие разности в единицах const·p_1. При таком выборе масштаба

$$\Delta T_{\min}\left(1-4, \text{схема } 2\right) = 0.578. \qquad (19)$$

В точках 5-6 локальный минимум температуры нужно рассчитывать через удельную мощность p_1 и расстояние x_2:

$$\Delta T_{\min}\left(5-6, \text{схема } 2\right) = \mathrm{const} \cdot p_1 \cdot 2^{-\frac{4.14}{3}} = 0.384 \cdot \mathrm{const} \cdot p_1 \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta T_{\min}\left(5-6, \text{схема } 2\right)}{\mathrm{const} \cdot p_1} = 0.384. \qquad (20)$$

Именно здесь и находится глобальный минимум температуры при подключении по Схеме 2.

Температуры внутри нагревателя при подключении по Схеме 1

На Рисунке 2 в Схеме 1 темным цветом выделены сопротивления R_{12}, ток через которые минимален по сравнению с другими двумя такими же сопротивлениями. Именно в окрестности «тёмных» сопротивлений можно ожидать минимума температуры. Альтернативно, глобальный минимум температуры может найтись около перемычки с сопротивлением R_3.

Удельные мощности, выделяющиеся в тех участках нагревателя, которым соответствуют «тёмные» сопротивления R_{12} и сопротивление R_3, можно найти по формулам (13-16), если заменить там потенциал U на потенциал U_1 в точке 1, показанной на Схеме 1 Рисунка 2. Разность потенциалов U и U_1 равна падению напряжения на сопротивлении R_{12}, разделяющем указанные точки. Ток через это сопротивление даётся формулой

$$I = \frac{U}{R_{12} + R_{123}} = 49.2\ A. \qquad (21)$$

Теперь,

$$U_1 = U - I \cdot R_{12} = U \cdot \left(1 - \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{123}}\right) = U \cdot \frac{R_{123}}{R_{12} + R_{123}} = 0.534 \cdot U. \qquad (22)$$

Полученный результат означает, что глобальный минимум при подключении по Схеме 1, аналогично Схеме 2, будет находится в точке типа 5-6, причём той из двух, что более удалена от точек подключения итстояника ЭДС. В единицах const·p_1, отличие температуры в этой точке от температуры окружающей среды даётся формулой

$$\frac{\Delta T_{\min}\left(5-6, \text{схема } 1\right)}{\mathrm{const} \cdot p_1} = \left(\frac{U_1}{U}\right)^2 \cdot 2^{-\frac{4.14}{3}} = 0.110. \qquad (23)$$

Отношение минимальных температур при подключениях по Схемам 1 и 2:

$$\frac{\Delta T_{\min}\left(5-6, \text{схема } 2\right)}{\Delta T_{\min}\left(5-6, \text{схема } 1\right)} = \left(\frac{U}{U_1}\right)^2 = \left(\frac{R_{12} + R_{123}}{R_{12}}\right)^2 = 3.505. \qquad (24)$$

В **Схеме 3** через центральную перемычку течет нулевой ток, так что приближение, предложенное в условии задачи, даёт нулевые отличия температур от температуры окружающей среды во всех точках, ближайших к этой перемычке.

Ответ: Мощности нагревателей при подключениях 1, 2 и 3 составят 1.55 кВт, 1.45 кВт и 1.06 кВт, соответственно.

Наибольшая минимальная температура внутри нагревателя достигается при подключении по Схеме 2. При этом, разность между этой температурой и температурой окружающей среды в 3.5 раза более высока, чем при подключении по Схеме 1. Для Схемы 3, минимальная температура равна температуре окружающей среды.