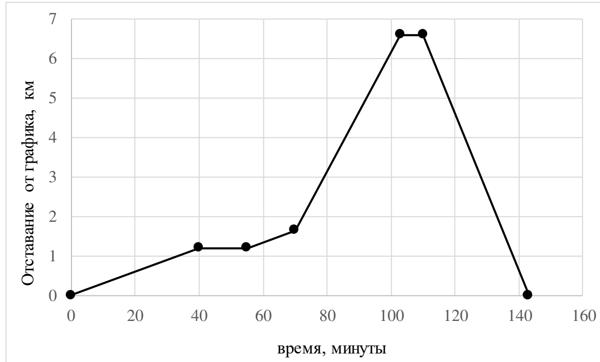
Задание 1. (25 баллов) Лесничий на реке



Направляясь в отдаленный бор, лесничий проходит на лодке два участка реки, а затем озеро, расположенное выше по течению. После недавних дождей, скорости течения на двух «речных» участках увеличились по сравнению с обычными значениями. На Рисунке показано отставание лодки от обычного графика движения, в зависимости от времени. Определить суммарную длину пути лесничего по реке и озеру, если скорость лодки относительно воды можно считать постоянной на всех участках, не зависящей ни от скорости течения, ни от дождей. Скорости течения в пределах каждого из участков реки считать постоянными, скорость течения в озере принять равной нулю. Обсудить возможность существования нескольких решений, удовлетворяющих как Рисунку, так и физическому смыслу задачи. Точки, выделенные на Рисунке, имеют следующие координаты (время; отставание): (0 мин.; 0 км.), (40 мин.; 1.2 км), (55 мин.; 1.2 км), (70 мин.; 1.65 км), (103 мин.; 6.6 км), (110 мин.; 6.6 км), (143 мин.; 0 км).

Решение

Наклоны участков графика, показанного на Рисунке, соответствуют разностям скоростей фактического движения лесничего и движения в «обычных» условиях. Положения выделенных точек соответствуют тем моментам времени, в которые лодка переходит с одного участка реки на следующий, при фактическом «сегодняшнем» движении, либо по «обычному» плану.

Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости «сегодняшнего» течения реки на участках 1, 2 и на озере (3). Отметим сразу, что $v_3 = 0$ км/ч. Аналогично, v_{10}, v_{20}, v_{30} – скорости течения реки в «обычных» условиях, причём $v_{30} = 0$ км/ч. Возможны две интерпретации участков графика, описанные в Таблице 1. Указанные разности скоростей равны тангенсам угла наклона участков графика. Отметим, что из графика тангенсы угла наклона можно получить в единицах «км/мин», для перехода к единицам «км/час» эти значения нужно умножить на 60.

Таблица 1. Разности скоростей течения в «сегодняшних» и «обычных» условиях

№ участка	Тангенс угла наклона, км/ч	Интерпретация 1	Интерпретация 2
1	1.8	$v_1 - v_{10}$	$v_1 - v_{10}$
2	0	$v_1 - v_{20}$	$v_1 - v_{20}$
3	1.8	$v_2 - v_{20}$	$v_1 - v_{30}$
4	9	$v_2 - v_{30}$	$v_2 - v_{30}$
5	0	$v_3 - v_{30}$	$v_3 - v_{30}$

Для каждой из интерпретаций, Таблица 1 задаёт систему уравнений, решаемых снизу вверх. Получаются следующие значения скоростей течения на «речных» участках:

Таблица 2. Скорости течения реки.

	v_1, км/ч	v_2, км/ч	v_{10}, км/ч	v_{20}, км/ч
Интерпретация 1	7.2	9	5.4	7.2
Интерпретация 2	1.8	9	0	1.8

Отметим, что результаты, приведённые в Таблицах 1-2, не зависят от скорости движения лодки относительно воды. С другой стороны, участок 6 на Рисунке описывает «сегодняшнее» движение лесничего по озеру после того, как в «обычных» условиях он уже завершил бы путь. Наклон этого участка, взятый с противоположным знаком, даёт скорость движения лодки в стоячей воде $v_Л$, равную 12 км/ч.

С использованием значения $v_Л$, можно сосчитать длины всех участков пути для обеих интерпретаций графика, по формулам $L_i = (v_Л - v_i)\cdot\Delta t_i$, где Δt_i – длительности нахождения лодки на каждом из участков. При этом, для расчёта можно использовать как «плановые» значения (v_i, Δt_i) , так и фактические «сегодняшние» значения. Оказывается, что Интерпретация 1 даёт одинаковые длины участков реки как при «плановом», так и при «сегодняшнем» движении лодки, а вот Интерпретация 2 – нет. Так что, Интерпретация 1 является единственным решением, удовлетворяющим физическому смыслу задачи (значение скорости $v_{10} = 0$ в Интерпретации 2 указывает на её ошибочность, однако не доказывает этого, поскольку нулевая скорость течения на одном из участков реки не запрещена условием).

Таблица 3. Длины участков пути

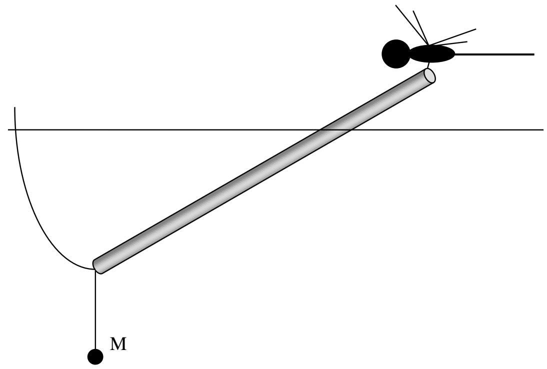
Участок 1, км	Участок 2, км	Участок 3, км	Суммарный путь, км
4.4	2.4	8	14.8

Объяснить существование ошибочной Интерпретации 2 можно следующим образом. График на Рисунке фактически был построен с использованием длин участков, приведённых в Таблице 3, так что существует Интерпретация 1, которая даёт именно эти длины. В общем же случае, «плановые» и «фактические» моменты времени могли соответствовать движению лодки по двум разным рекам, с различающимися длинами участков. Интерпретация 2 соответствует такому общему случаю, поскольку не была создана специально.

Ответ: длина пути лесничего равна 14.8 км.

Задание 2. (25 баллов) Стрекоза и поплавок

Сразу после заброса на самый край цилиндрического поплавка садится стрекоза, после чего поплавок остаётся неподвижным в положении, показанном на Рисунке.



Найти массу стрекозы, если известно, что объём поплавка составляет 2 см^3, его масса – 0.84 г, а масса груза $M = 0.54$ г. Масса поплавка равномерно распределена вдоль его длины. Считать известным то, что сила тяжести приложена в середине поплавка, а сила Архимеда – в середине его подводной части. Натяжением лески выше крепления к поплавку, как и поверхностным натяжением воды, можно пренебречь. Плотность воды принять равной 1 г/см^3.

Решение

Пусть m – масса поплавка, L, S – длина и площадь поплавка, m_C – масса стрекозы. Также, обозначим длину подводной части поплавка через x, а плотность воды – через ρ. Теперь, масса воды, вытесняемая подводной частью поплавка, будет равна $\rho \cdot S \cdot x$, так что условие его плавания запишется в виде

$$\rho \cdot S \cdot x = m + M + m_C .$$

Неподвижность поплавка в наклонном положении означает, что скомпенсированы моменты действующих на него сил. С учетом того, что сила Архимеда приложена в середине подводной части поплавка и направлена вверх, уравнение баланса моментов сил относительно точки пересечения поплавка с поверхностью воды принимает вид

$$M \cdot x - \frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - (L - x) \cdot m_C - \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot m = 0 .$$

Альтернативно, можно рассмотреть баланс моментов относительно любой другой точки, например – точки крепления груза к поплавку. В последнем случае, получается уравнение

$$\frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - L \cdot m_C - \frac{L}{2} \cdot m = 0 .$$

Теперь, выражаем массу стрекозы из условия плавания, и подставляем результат в уравнение баланса моментов:

$$\frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - L \cdot (\rho \cdot S \cdot x - m - M) - \frac{L}{2} \cdot m = 0 .$$

Если раскрыть скобки, а также выделить коэффициент $\rho \cdot S \cdot L$, равный массе поплавка, то получается квадратное уравнение

$$x^2 - 2Lx + \frac{2L^2}{\rho SL} \cdot \left(M + \frac{m}{2} \right) = 0,$$

с решениями

$$x_{1,2} = L \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2M + m}{\rho SL}} \right).$$

Физическому смыслу задачи удовлетворяет только решение с «минусом», поскольку $x \le L$. Коэффициент $\rho \cdot S \cdot L$ равен 2 г, как произведение заданных объёма поплавка и плотности воды. Подстановка значений M и m даёт $x = 0.8 \cdot L$. Теперь из условия плавания поплавка получается масса стрекозы

$$m_C = \rho \cdot S \cdot x - m - M = 0.8 \cdot \rho \cdot S \cdot L - m - M = 0.22 \text{ г}.$$

Ответ: масса стрекозы равна 0.22 г.

Задание 3. (25 баллов) Чайник рыболова

Для того, чтобы вскипятить воду в чайнике, рыболов использует газовую плитку, тепловая мощность которой постоянна. Наполнив чайник водой из родника, он возвращается через 10 минут и видит, что вода уже кипит. Более того, в ходе кипения испарилось 15 % воды. Рыболов доливает воду из родника до первоначального уровня. Какова температура воды в роднике, если чайник вновь закипает через 45 секунд? Теплоемкость воды принять равной 4200 Дж/(кг·К), теплоту парообразования при 100 °C – равной 2300 кДж/кг. Полагать, что испарением воды до закипания можно пренебречь.

Решение

Количество теплоты, передаваемое чайнику от газовой горелки, пропорционально её мощности P и времени нагрева t_1, с коэффициентом $\alpha < 1$, учитывающим утечку тепла:

$$\alpha \cdot P \cdot t_1 = m \cdot c \cdot (100 - T_0) + 0.15 \cdot m \cdot \lambda, \quad (1)$$

где c – удельная теплоёмкость воды, λ - удельная теплота парообразования при 100 °C, m – исходная масса воды в чайнике, T_0 – температура воды в роднике, по Цельсию.

За время t_2 газовая горелка нагревает воду, добавленную рыболовом, так что

$$\alpha \cdot P \cdot t_2 = 0.15 \cdot m \cdot c \cdot (100 - T_0) . \qquad (2)$$

Отсюда получаем, что

$$\alpha \cdot P \cdot t_1 = \alpha \cdot P \cdot t_2 \cdot \frac{t_1}{t_2} = 0.15 \cdot m \cdot c \cdot (100 - T_0) \cdot \frac{t_1}{t_2} . \qquad (3)$$

Подстановка результата (3) в уравнение (1) даёт

$$0.15 \cdot m \cdot c \cdot (100 - T_0) \cdot \frac{t_1}{t_2} = m \cdot c \cdot (100 - T_0) + 0.15 \cdot m \cdot \lambda ,$$

откуда

$$(100 - T_0) \cdot c \cdot \left(0.15 \cdot \frac{t_1}{t_2} - 1 \right) = 0.15 \cdot m \cdot \lambda \Rightarrow$$

$$T_0 = 100 - \frac{0.15 \cdot m \cdot \lambda}{0.15 \cdot \frac{t_1}{t_2} - 1} .$$

Подстановка значений из условия задачи даёт T_0 = 17.86 °C.

Ответ: Температура воды в роднике равна 17.86 °.

Задание 4. (25 баллов) **Электрический нагреватель охотника**

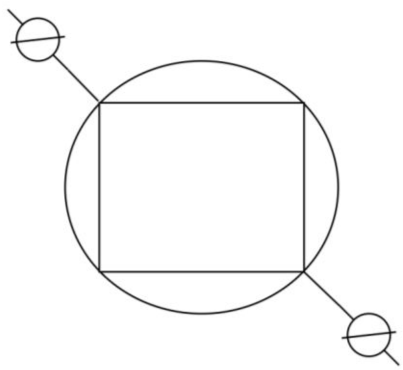
В холодный день охотник собирает самодельный плоский электрический нагреватель из нихромовой токопроводящей проволоки диаметром D = 1 мм с удельным сопротивлением $\rho \approx 1*10^{-6}$ Ом*м. Из проволоки ему удалось изготовить кольцо (длиной окружности 50 см) и квадрат, причем квадрат вписан в кольцо, а вершины квадрата с помощью электрического контакта соединены с кольцом. Внешний источник ЭДС (E=10В) планируется подключать к вершинам квадрата. Определите электрическое сопротивление нагревателя для каждого варианта подключения?

Возможный вариант решения

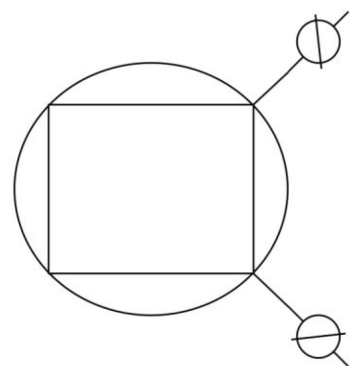
Квадрат вписан в окружность. Длина окружности $L_{\text{окр}} = \pi D = 50$ см, толщина сечения проволоки $d = 1$ мм, длина «диагонали» квадрата составит $l' = 20$ см, удельное сопротивление проволоки $\rho = 1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, напряжение источника ЭДС $\varepsilon = 10$ В.

1) Расчёт сопротивления контура

Возможны 2 варианта подключения выводов источника ЭДС к электрическому нагревателю:

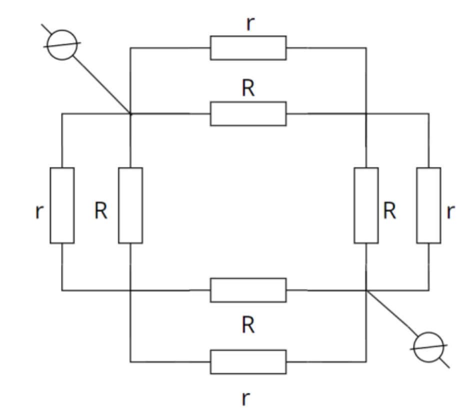


Вариант А

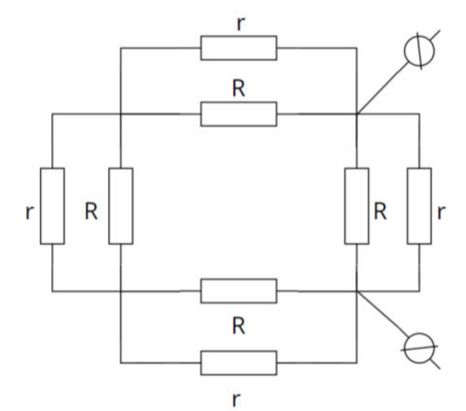


Вариант В

Для удобства расчетов построим эквивалентные схемы замещения, представим каждый участок контура как ветвь с резистором (логично, что дуги окружности и стороны квадрата будут иметь разную длину, следовательно, разное сопротивление),



Вариант А



Вариант В

Обозначим l_r – длина дуги окружности между вершинами квадрата, l_R – длина стороны квадрата, r – электрическое сопротивление дуги окружности, R – электрическое сопротивление стороны квадрата.

Проведём расчёты r и R.

$$l_r = \frac{L_{\text{окр}}}{4} = \frac{\pi D}{4} = \frac{0{,}5}{4} \approx 0{,}125 \text{ м} \qquad l_R = \frac{L_{\text{окр}}}{\pi\sqrt{2}} = \frac{0{,}5}{\pi\sqrt{2}} \approx 0{,}113 \text{ м}$$

$$R_i = \rho_i \cdot \frac{l_i}{S_i} = \rho_i \cdot \frac{l_i \cdot 4}{\pi \cdot d^2} \text{ Ом}$$

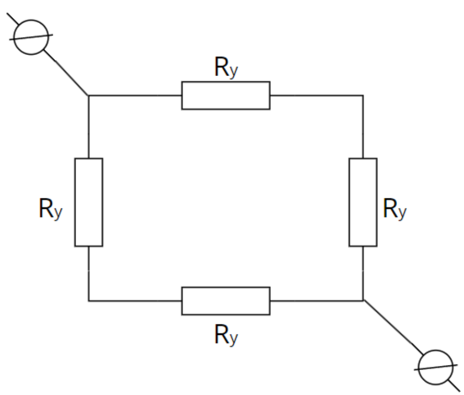
Где, ρ_i – удельное электрическое сопротивление проводника, l_i – длина проводника, S_i – площадь сечения проводника, d – диаметр проводника.

$$r = 1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0{,}5 \cdot 4}{4 \cdot \pi \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2} = 0{,}1592 \text{ Ом}$$

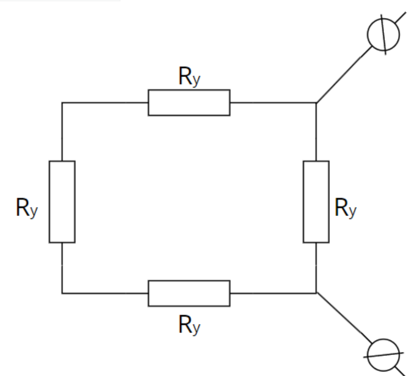
$$R = 1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0{,}5 \cdot 4}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2} = 0{,}1434 \text{ Ом}$$

Замечаем, что все резисторы R и r в эквивалентных схемах соединены между собой параллельно. Находим их эквивалентное сопротивление R_y и упрощаем схему.

$$R_y = \frac{R \cdot r}{R + r} = \frac{0{,}1434 \cdot 0{,}1592}{0{,}1434 + 0{,}1592} = 0{,}0754 \text{ Ом}$$



Вариант А



Вариант В

Теперь несложно рассчитать общее сопротивление цепи $R_{обш}$ воспользовавшись формулами последовательного и параллельного соединения сопротивлений:

$$R_{\text{общ}} = \frac{2R_y \cdot 2R_y}{2R_y + 2R_y} = R_y = 0{,}0754 \text{ Ом}$$

Вариант А

$$R_{\text{общ}} = \frac{3R_y \cdot R_y}{3R_y + R_y} = \frac{3}{4} \cdot R_y = 0{,}0566 \text{ Ом}$$

Вариант В

Ответ: Вариант А $R_{\text{общ}} = 0{,}0754$ Ом; Вариант В $R_{\text{общ}} = 0{,}0566$ Ом