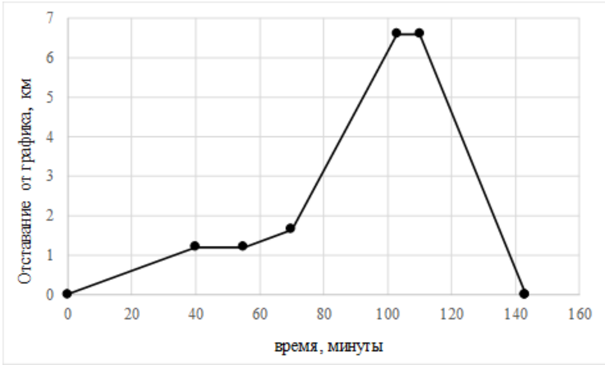
Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) **Лесничий на реке**



Направляясь в отдаленный бор, лесничий проходит на лодке два участка реки, а затем озеро, расположенное выше по течению. После недавних дождей, скорости течения на двух «речных» участках увеличились по сравнению с обычными значениями. На Рисунке показано отставание лодки от обычного графика движения, в зависимости от времени. Определить суммарную длину пути лесничего по реке и озеру, если скорость лодки относительно воды можно считать постоянной на всех участках, не зависящей ни от скорости течения, ни от дождей. Скорости течения в пределах каждого из участков реки считать постоянными, скорость течения в озере принять равной нулю. Рассмотреть возможность существования нескольких решений задачи. Точки, выделенные на Рисунке, имеют следующие координаты (время; отставание): (0 мин.; 0 км.), (40 мин.; 1.2 км), (55 мин.; 1.2 км), (70 мин.; 1.65 км), (103 мин.; 6.6 км), (110 мин.; 6.6 км), (143 мин.; 0 км).

Решение

Наклоны участков графика, показанного на Рисунке, соответствуют разностям скоростей фактического движения лесничего и движения в «обычных» условиях. Положения выделенных точек соответствуют тем моментам времени, в которые лодка переходит с одного участка реки на следующий, при фактическом «сегодняшнем» движении, либо по «обычному» плану.

Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости «сегодняшнего» течения реки на участках 1, 2 и на озере (3). При этом, $v_3 = 0$ км/ч. Аналогично, v_{10}, v_{20}, v_{30} – скорости течения реки в «обычных» условиях, причём $v_{30} = 0$ км/ч. Возможны две интерпретации участков графика, описанные в Таблице 1. Указанные разности скоростей равны тангенсам угла наклона участков графика. Отметим, что из графика тангенсы угла наклона можно получить в единицах «км/мин», для перехода к единицам «км/час» эти значения нужно умножить на 60.

Таблица 1. Разности скоростей течения в «сегодняшних» и «обычных» условиях

№ участка	Тангенс угла наклона, км/ч	Интерпретация 1	Интерпретация 2
1	1.8	$v_1 - v_{10}$	$v_1 - v_{10}$
2	0	$v_1 - v_{20}$	$v_1 - v_{20}$
3	1.8	$v_2 - v_{20}$	$v_1 - v_{30}$
4	9	$v_2 - v_{30}$	$v_2 - v_{30}$
5	0	$v_3 - v_{30}$	$v_3 - v_{30}$

Для каждой из интерпретаций, Таблица 1 задаёт систему уравнений, решаемых снизу вверх. Получаются следующие значения скоростей течения на «речных» участках:

Таблица 2. Скорости течения реки.

	v_1, км/ч	v_2, км/ч	v_{10}, км/ч	v_{20}, км/ч
Интерпретация 1	7.2	9	5.4	7.2
Интерпретация 2	1.8	9	0	1.8

Результаты, приведённые в Таблицах 1-2, не зависят от скорости движения лодки относительно воды. С другой стороны, участок 6 на Рисунке описывает «сегодняшнее» движение лесничего по озеру после того, как в «обычных» условиях он уже завершил бы путь. Наклон этого участка, взятый с противоположным знаком, даёт скорость движения лодки в стоячей воде $v_Л$, равную 12 км/ч.

С использованием значения $v_Л$, можно сосчитать длины всех участков пути для обеих интерпретаций графика, по формулам $L_i = (v_Л - v_i)\cdot\Delta t_i$, где Δt_i – длительности нахождения лодки на каждом из участков. При этом, для расчёта можно использовать как «плановые» значения (v_i, Δt_i) , так и фактические «сегодняшние» значения. Оказывается, что Интерпретация 1 даёт одинаковые длины участков реки как при «плановом», так и при «сегодняшнем» движении лодки, а вот Интерпретация 2 – нет. Таким образом, Интерпретация 1 является единственным решением, удовлетворяющим физическому смыслу задачи (значение скорости $v_{10} = 0$ в Интерпретации 2 указывает на её ошибочность, однако не доказывает этого, поскольку нулевая скорость течения на одном из участков реки не запрещена условием).

Таблица 3. Длины участков пути

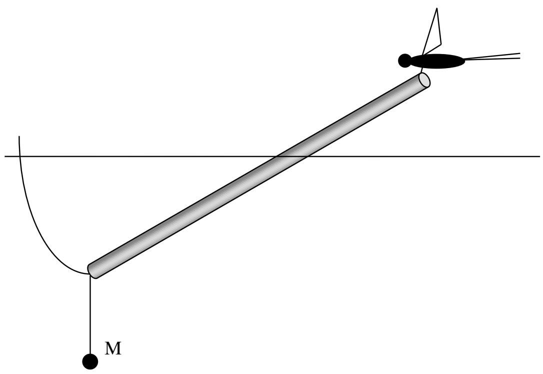
Участок 1, км	Участок 2, км	Участок 3, км	Суммарный путь, км
4.4	2.4	8	14.8

Объяснить существование ошибочной Интерпретации 2 можно следующим образом. График на Рисунке фактически был построен с использованием длин участков, приведённых в Таблице 3, так что существует Интерпретация 1, которая даёт именно эти длины. В общем же случае, «плановые» и «фактические» моменты времени могли соответствовать движению лодки по двум разным рекам, с различающимися длинами участков. Интерпретация 2 соответствует такому общему случаю, поскольку не была создана специально.

Ответ: длина пути лесничего равна 14.8 км.

Задание 2. (25 баллов) **Поплавок и подёнка**

Цилиндрический поплавок находился в равновесном положении, показанном на Рисунке, когда с его верхнего края взлетела подёнка массой 0.03 г. Каким будет новое равновесное положение поплавка, если известно, что его объём составляет 1 см³, а масса превосходит массу груза, причём равномерно распределена вдоль длины? Значение массы груза – $M = 0.27$ г. Считать известным то, что сила тяжести приложена в середине поплавка, а сила Архимеда – в середине его подводной части. Натяжением лески выше крепления к поплавку, как и поверхностным натяжением воды, можно пренебречь. Плотность воды принять равной 1 г/см³.



Решение

Пусть m – масса поплавка, L, S – длина и площадь поплавка, $m_П$ – масса подёнки. Обозначим длину подводной части поплавка через x, а плотность воды – через ρ. Теперь, масса воды, вытесняемая подводной частью поплавка, будет равна $\rho \cdot S \cdot x$, так что условие его плавания запишется в виде

$$\rho \cdot S \cdot x = m + M + m_П.$$

Неподвижность поплавка в наклонном положении означает нулевую сумму моментов силы, приложенных к нему. С учетом того, что сила Архимеда приложена в середине подводной части поплавка и направлена вверх, уравнение баланса этих моментов относительно точки пересечения поплавка с поверхностью воды принимает вид

$$M \cdot x - \frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - (L - x) \cdot m_П - \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot m = 0.$$

Альтернативно, можно рассмотреть баланс моментов относительно любой другой точки, например – точки крепления груза к поплавку. В последнем случае, получается уравнение

$$\frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - L \cdot m_П - \frac{L}{2} \cdot m = 0.$$

Теперь, выражаем массу поплавка из условия плавания и подставляем результат в уравнение баланса моментов:

$$\frac{\rho \cdot S \cdot x^2}{2} - L \cdot m_П - \frac{L}{2} \cdot (\rho \cdot S \cdot x - m_П - M) = 0.$$

Если раскрыть скобки, а также выделить коэффициент $\rho \cdot S \cdot L$, равный массе поплавка, то получается квадратное уравнение

$$x^2 - Lx + \frac{L^2}{\rho SL} \cdot (M - m_{\Pi}) = 0$$

с решениями

$$x_{1,2} = \frac{L}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{M - m_{\Pi}}{\rho SL}} \right).$$

Произведение $S \cdot L$ равно объёму поплавка, то есть 1 см^3. С учётом плотности воды ρ= 1 г/см^3, получается, что $\rho \cdot S \cdot L$= 1 г. Подставляя значения массы груза и подёнки, получаем $x_1 = 0.6 \cdot L$, $x_2 = 0.4 \cdot L$. Массу поплавка можно сосчитать по формуле

$$m = \rho SL\frac{x}{L} - M - m_{\Pi} = \left(\frac{x}{L} - 0.3 \right) \text{грамма} = \begin{cases} 0.3 \text{ г при } x = 0.6 \cdot L, \\ 0.1 \text{ г при } x = 0.4 \cdot L. \end{cases}$$

Только в первом из полученных решений масса поплавка превышает массу груза, это решение и даёт единственный ответ задачи.

Новое равновесное погружение поплавка находим из условия его плавания без подёнки:

$$\rho \cdot S \cdot L \cdot \frac{x}{L} = m + M \Rightarrow x = \frac{m + M}{\rho \cdot S \cdot L} \cdot L = 0.57 \cdot L.$$

При этом, ориентация поплавка станет вертикальной, так как иначе моменты сил скомпенсированными не будут.

Ответ: поплавок придёт в вертикальное положение с глубиной подводной части, равной 0.57 его длины.

Задание 3. (25 баллов) **Чайник рыболова**

Для того, чтобы вскипятить воду в чайнике, рыболов использует газовую плитку, тепловая мощность которой постоянна. Наполнив чайник водой из родника, он возвращается через 10 минут и видит, что вода уже кипит. Более того, в ходе кипения испарилось 15 % воды. Рыболов доливает воду из родника до первоначального уровня. Какова температура воды в роднике, если чайник вновь закипает через 45 секунд? Теплоемкость воды принять равной 4200 Дж/(кг·K), теплоту парообразования при 100 °C – равной 2300 кДж/кг. Полагать, что испарением воды до закипания можно пренебречь.

Решение

Количество теплоты, передаваемое чайнику от газовой горелки, пропорционально её мощности P и времени нагрева t_1, с коэффициентом $\alpha < 1$, учитывающим утечку тепла:

$$\alpha \cdot P \cdot t_1 = m \cdot c \cdot (100 - T_0) + 0.15 \cdot m \cdot \lambda, \qquad (1)$$

где c – удельная теплоёмкость воды, λ - удельная теплота парообразования при 100 °C, m – исходная масса воды в чайнике, T_0 – температура воды в роднике, по Цельсию.

За время t_2 газовая горелка нагревает воду, добавленную рыболовом, так что

$$\alpha \cdot P \cdot t_2 = 0.15 \cdot m \cdot c \cdot (100 - T_0). \qquad (2)$$

Отсюда получаем, что

$$\alpha \cdot P \cdot t_1 = \alpha \cdot P \cdot t_2 \cdot \frac{t_1}{t_2} = 0.15 \cdot m \cdot c \cdot (100 - T_0) \cdot \frac{t_1}{t_2}. \qquad (3)$$

Подстановка результата (3) в уравнение (1) даёт

$$0.15 \cdot m \cdot c \cdot (100 - T_0) \cdot \frac{t_1}{t_2} = m \cdot c \cdot (100 - T_0) + 0.15 \cdot m \cdot \lambda,$$

откуда

$$(100 - T_0)\cdot c \cdot \left(0.15\cdot\frac{t_1}{t_2} - 1\right) = 0.15\cdot m\cdot\lambda \Rightarrow$$

$$T_0 = 100 - \frac{0.15\cdot m\cdot\lambda}{0.15\cdot\frac{t_1}{t_2} - 1}.$$

Подстановка значений из условия задачи даёт T_0 = 17.86 °C.

Ответ: Температура воды в роднике равна 17.9 °.

Задание 4. (25 баллов) **Электрический нагреватель охотника**

В холодный день охотник собирает самодельный плоский электрический нагреватель из нихромовой токопроводящей проволоки диаметром D = 1 мм с удельным сопротивлением $\rho \approx 1*10^{-6}$ Ом*м. Из проволоки ему удалось изготовить кольцо и квадрат, причем квадрат вписан в кольцо, а вершины квадрата с помощью электрического контакта соединены с кольцом. Оставшимся куском нихромовой проволоки, длиной L=20 см, охотник замкнул диагональ квадрата. Источник ЭДС, напряжением E=10В, можно подключить только к вершинам квадрата. Определите суммарную электрическую мощность нагревателя для каждого варианта подключения.

Решение

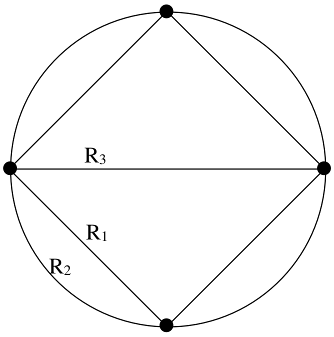


Рис. 1. Расположение отрезков проволоки в нагревателе

Источник ЭДС может быть подключен к вершинам квадрата тремя способами:
1. К соседним вершинам;
2. К противоположным вершинам, соединенным прямым отрезком проволоки.
3. К противоположным вершинам, между которыми прямого соединения нет.

Обозначим сопротивления участков нагревателя, как показано на Рисунке 1. Условие задачи позволяет вычислить эти сопротивления по формуле

$$R = \frac{\rho\cdot L}{S}, \qquad (1)$$

где L – длины участков. Получающиеся значения сопротивлений приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Участки и сопротивления

Участки нагревателя	Длина, м		R, Ом
Диагональ	0.2	R_3	0.255
Сторона квадрата	0.14142136	R_1	0.180
Дуга круга	0.15707963	R_2	0.2

Отметим, что сопротивления R_1 и R_2 всегда будут «работать» параллельными парами, так что имеет смысл ввести сопротивление такой пары

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0.0948 \text{ Ом}. \qquad (2)$$

Эквивалентные схемы каждого из трех подключений будут следующими:

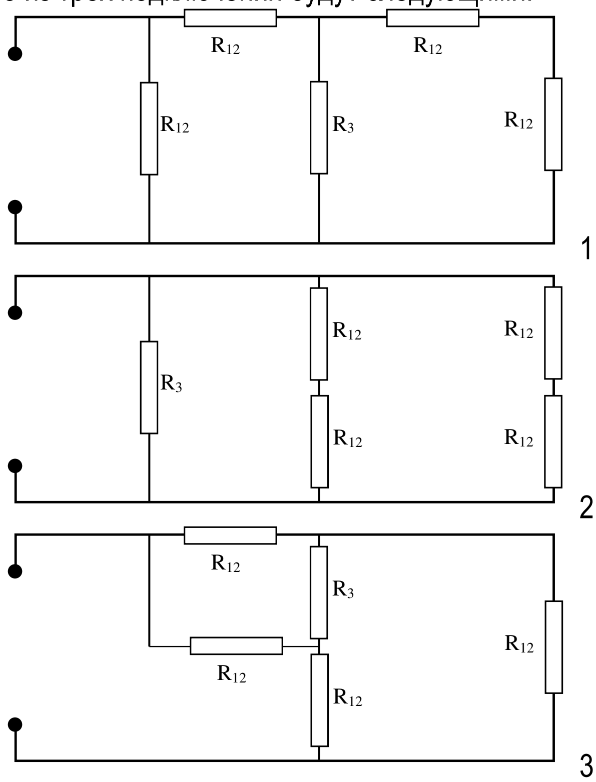


Рис. 2. Эквивалентные схемы подключений

В **Схеме 1** сопротивление R_3 параллельно сумме двух сопротивлений R_{12}, что даст эквивалентное сопротивление

$$R_{123} = \frac{2R_{12} \cdot R_3}{2R_{12} + R_3} = 0.109 \text{ Ом}. \qquad (3)$$

Затем, в Схеме 1 параллельны сопротивления R_{12} и R_{123}, что даст полное эквивалентное сопротивление этой схемы

$$R_{1,\text{ экв}} = \frac{R_{12} \cdot \left(R_{12} + R_{123}\right)}{R_{12} + \left(R_{12} + R_{123}\right)} = 0.0646 \text{ Ом}. \qquad (4)$$

Соответственно, суммарная мощность нагревателя составит

$$P_1 = \frac{U^2}{R_{1,\text{ экв}}} = \frac{100}{0.0508} = 1.55 \text{ кВт}. \qquad (5)$$

В **Схеме 2** сопротивление R_3 параллельно сумме двух удвоенных сопротивлений R_{12}. Эквивалентное сопротивление можно рассчитать по формуле

$$\frac{1}{R_{2,\text{ экв}}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{2R_{12}} + \frac{1}{2R_{12}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{12}}. \qquad (6)$$

Таким образом, полное эквивалентное сопротивление Схемы 2:

$$R_{2,\text{ экв}} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} = 0.0691 \text{ Ом}. \qquad (7)$$

Суммарная мощность нагревателя в этом случае:

$$P_2 = \frac{U^2}{R_{2,\text{ экв}}} = \frac{100}{0.0542} = 1.45 \text{ кВт}. \qquad (8)$$

В **Схеме 3** диагональная перемычка (с сопротивлением R_3) соединяет эквивалентные точки, в которых потенциалы равны. Соответственно, ток через R_3 равен нулю. Так что, эквивалентное сопротивление этой схемы даётся формулой:

$$R_{3,\,\text{экв}} = \frac{2R_{12} \cdot 2R_{12}}{2R_{12} + 2R_{12}} = R_{12} = 0.0948\ \text{Ом}. \tag{9}$$

Суммарная мощность нагревателя теперь:

$$P_3 = \frac{U^2}{R_{3,\,\text{экв}}} = \frac{100}{0.0744} = 1.06\ \text{кВт}. \tag{10}$$

Ответ: мощности нагревателя при трех включениях равны 1.55 кВт, 1.45 кВт и 1.06 кВт.