

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Протозвезда в газовом облаке

Протозвезда массы $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, которую можно рассматривать как точечный источник гравитационного поля, движется через однородное облако молекулярного водорода с постоянной скоростью, равной 10 км/с. Какую массу вещества сможет поглотить эта протозвезда на пути длиной в один световой год (расстояние, которое свет проходит за год), если она захватывает молекулы водорода, приближающиеся на расстояния менее 200 астрономических единиц ($2.94 \cdot 10^{10}$ км)? Потенциальную энергию молекулы водорода массы m в гравитационном поле рассчитывать по формуле $E_{\text{пот}} = -G \cdot M \cdot m / R$, где R – расстояние до центра протозвезды, $G = 6.67430 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ – гравитационная постоянная. Скорость света принять равной $3 \cdot 10^8$ м/с. Концентрация молекул водорода в облаке равна 10^5 частиц/см³. Изменением гравитационного поля, связанным с увеличением массы протозвезды, пренебречь.

Решение

Пусть протозвезда движется сквозь газовое облако по прямой. Эту прямую можно рассмотреть в качестве оси цилиндра, длина которого равна 1 световому году, а радиус равен некоторому критическому значению $R_{\text{крит}}$. Молекулы водорода, расположенные внутри этого цилиндра, будут захвачены протозвездой, тогда как молекулы вне цилиндра захвачены не будут. Ниже, найдём радиус цилиндра $R_{\text{крит}}$.

Для того, чтобы проще описать взаимодействие частиц облака с протозвездой, выберем протозвезду в качестве начала координат системы отсчета, движущейся со скоростью $V = 10$ км/с. В этой системе отсчета протозвезда покоится, а вещество облака движется мимо неё со скоростью $v_0 = 10$ км/с. Молекулы водорода будут притягиваться к протозвезде за счет гравитационного притяжения.

Отметим, что несмотря на очень низкую плотность, молекулярное облако в космических масштабах можно рассматривать как сплошную среду (идеальный газ), поскольку длина свободного пробега молекул водорода составляет около 0.005 астрономических единицы, что мало по сравнению с характерными для космоса расстояниями. Однако, в данной задаче скорость движения молекул относительно протозвезды намного более высока, чем скорость теплового движения молекул (0.8 км/с при температуре облака, равной 50 К). Это значит, что близкие молекулы водорода можно считать покоящимися друг относительно друга, вокруг протозвезды они будут двигаться одинаково, и свойства сплошной среды не проявятся. Таким образом, рассмотрим движение молекулы относительно протозвезды так, как если бы оно происходило в вакууме.

В качестве модельного представления, задача предполагает, что на расстояниях менее 200 астрономических единиц от центра протозвезды описывать движение частиц без взаимодействия с окружением уже нельзя, из-за высокой плотности вещества. Поэтому условие задачи предполагает, что на меньших расстояниях протозвезда «автоматически» захватывает частицы. На Рисунке 1 схематически показана траектория молекулы, избегающей захвата протозвездой.

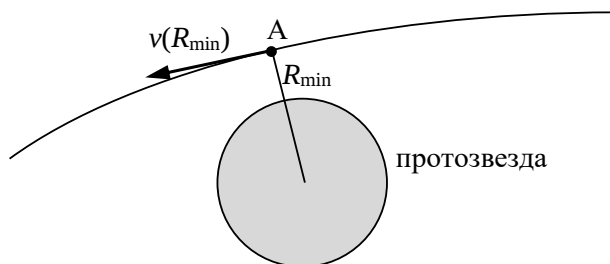


Рисунок 1. Минимальное расстояние от молекулы до протозвезды

При движении молекулы в гравитационном поле будут сохраняться полная механическая энергия, а также момент импульса. На большом расстоянии от протозвезды потенциальная энергия $E_{\text{пот}}$ стремится к нулю, **Международная олимпиада школьников УрФУ «Изумруд» 2025 2 этап**

тогда как кинетическая энергия далёких молекул массы m в системе отсчета, неподвижной относительно протозвезды, даётся формулой

$$E_{\text{кин}} = mv_0^2/2.$$

Момент импульса можно рассчитать как векторное произведение радиус-вектора, соединяющего молекулу с центром протозвезды, и вектора скорости частицы относительно протозвезды. На большом расстоянии от протозвезды

$$\vec{M} = m \cdot (\vec{R} \times \vec{v}_0)$$

Вектор $\vec{M}$ сохраняет свои значение и направление, будучи перпендикулярным к векторам $\vec{R}$ и $\vec{v}_0$, откуда следует, что движение молекулы вокруг протозвезды всё время происходит в одной и той же плоскости. Значение модуля момента импульса

$$|\vec{M}| = m \cdot |\vec{R}| \cdot |\vec{v}_0| \cdot \sin(\vec{R} \wedge \vec{v}_0) = m \cdot v_0 \cdot b,$$

где b – начальное расстояние между молекулой и осью x , показанное на Рисунке 2.

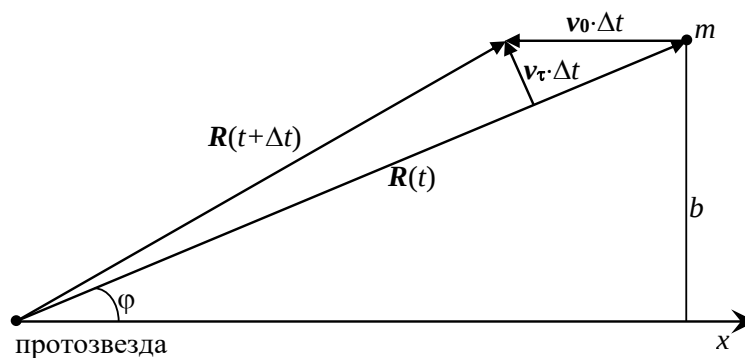


Рисунок 2. К расчету момента импульса молекулы на большом расстоянии от протозвезды.

Без использования векторной формы, момент импульса молекулы можно получить через произведение расстояния R и компоненты вектора $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно вектору $\vec{R}$. Иллюстрация такого подхода приведена на Рисунке 2. Компонента скорости v_τ фактически представляет собой движение вдоль участка окружности, радиус которой совпадает с текущим расстоянием R от центра протозвезды до молекулы:

$$|\vec{M}| = m \cdot R \cdot v_\tau = m \cdot R \cdot v_0 \cdot \sin \varphi = m \cdot R \cdot v_0 \cdot (b / R) = m \cdot v_0 \cdot b.$$

На Рисунке 2 $R(t+\Delta t) \approx R(t)$, если расстояние R велико по сравнению с $v_0 \cdot \Delta t$.

В точке А, ближайшей к центру протозвезды (Рисунок 1), вектор скорости направлен перпендикулярно радиус-вектору. Это значит, что момент импульса здесь равен $m \cdot v \cdot R_{\text{min}}$, так что

$$v(R_{\text{min}}) \cdot R_{\text{min}} = v_0 \cdot b.$$

Закон сохранения энергии при этом даст

$$\frac{mv(R_{\text{min}})^2}{2} - G \frac{M \cdot m}{R_{\text{min}}} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Пусть R_{min} совпадает с радиусом захвата молекул протозвездой (200 а.е.). Соответствующее значение b в этом случае совпадёт с критическим радиусом цилиндра $R_{\text{крит}}$, внутри которого находятся захватываемые молекулы. Таким образом

$$v(R_{\min}) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{R_{\min}}} = 10.4 \text{ км/с},$$

откуда

$$R_{\text{крит}} = \frac{v(R_{\min}) \cdot R_{\min}}{v_0} = \sqrt{R_{\min}^2 + \frac{2GM \cdot R_{\min}}{v_0^2}} = 3.07 \cdot 10^{10} \text{ км}.$$

Объём цилиндра, внутри которого будут поглощены молекулы:

$$V = \pi \cdot R_{\text{крит}}^2 \cdot (1 \text{ св. год}) = 2.8 \cdot 10^{34} \text{ км}^3.$$

Использовано значение 1 св. год = $9.46 \cdot 10^{12}$ км. Массу поглощенного вещества получаем умножением объёма на плотность, с учетом того, что масса молекулы водорода равна 2 а.е.м., то есть $3.32 \cdot 10^{-27}$ кг. В результате $M_{\text{полг}} = 9.3 \cdot 10^{27}$ кг. Эта масса мала по сравнению с массой протозвезды, так что изменением гравитационной силы в процессе её поглощения при решении задачи можно было пренебречь.

Ответ: $M_{\text{полг}} = 9.3 \cdot 10^{27}$ кг.

Рекомендуемые баллы:

Понимание того, что молекулы будут захватываться протозвездой внутри цилиндра некоторого радиуса, построенного вдоль её траектории – **до 6 баллов**.

Разумная модель расчета радиуса цилиндра, не обязательно верная – **до 4 баллов**.

Правильный расчет массы вещества внутри цилиндра с тем радиусом, который был получен в ходе решения задачи – **до 7 баллов**.

Правильный расчет радиуса цилиндра – **до 8 баллов**.

Задание 2. (25 баллов) Яркость Венеры

Принять, что Земля и Венера вращаются вокруг Солнца по круговым орбитам с радиусами $R_3 = 147 \cdot 10^6$ км, $R_В = 108 \cdot 10^6$ км. Считать, что яркость Венеры пропорциональна освещенной доле площади её диска, видимого с Земли, а также обратно пропорциональна квадрату расстояния от Земли до Венеры. Построить график зависимости яркости Венеры от её расстояния до Земли, позволяющий определить положение максимума яркости. Оценить положение этого максимума с точностью, не худшей, чем 0.1 астрономической единицы ($0.1 \cdot R_3$). Считать, что освещенная часть поверхности Венеры, как и часть поверхности, видимая с Земли, представляют собой полусферы, ограниченные плоскими сечениями α и β , проходящими через центр Венеры. Освещенную долю площади диска Венеры, видимого с Земли, рассчитывать по формуле $S = (1 - \cos(\varphi))/2$, где φ - угол между сечениями α и β .

Решение

Для изучения яркости Венеры, рассмотрим Рисунок 1. Буквой S на Рисунке обозначена область на поверхности Венеры, которая одновременно освещена Солнцем и видима с Земли. Также, на Рисунке 1 показаны сечения α и β , пересекающиеся под углом φ . Проекция области S на диск Венеры, обращенный к Земле, имеет форму месяца, который схематически показан на том же Рисунке. Именно площадь этого месяца, как доля от площади диска Венеры, дается формулой $S = (1 - \cos(\varphi))/2$, приведенной в условии задачи.

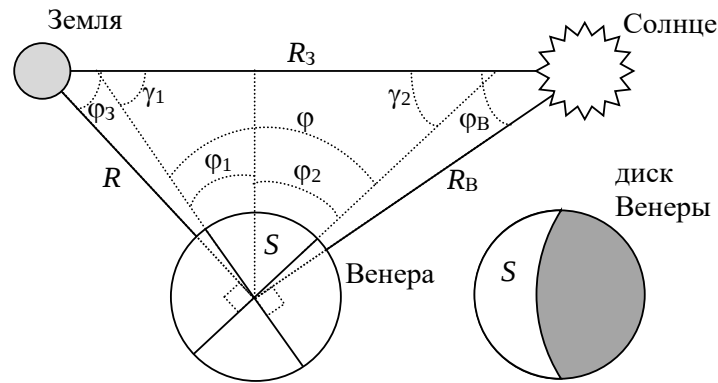


Рисунок 1. Положение и освещенность Венеры.

На Рисунке 1, угол φ является суммой углов φ_1 и φ_2 . В свою очередь, угол φ_1 равен $90^\circ - \gamma_1$, тогда как $\gamma_1 = 90^\circ - \varphi_B$. Таким образом,

$$\varphi_1 = 90^\circ - (90^\circ - \varphi_B) = \varphi_B.$$

Аналогично,

$$\varphi_2 = 90^\circ - (90^\circ - \varphi_3) = \varphi_3.$$

Получили, что

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_B.$$

Яркость L Венеры, видимой с Земли, пропорциональна величине

$$S = (1 - \cos(\varphi))/2 = (1 - \cos(\varphi_3 + \varphi_B))/2.$$

Одновременно, яркость L будет пропорциональна телесному углу Ω , который Венера занимает на небе. Этот угол равен площади сечения Венеры, проходящего через её центр, деленной на квадрат расстояния до Венеры и на 4π . Площадь сечения – константа. Квадрат расстояния даётся формулой

$$R^2 = R_3^2 + R_B^2 - 2R_3R_B \cdot \cos(\varphi_B).$$

Согласно условию задачи, положение максимума яркости нужно определить с точностью до $0.1 \cdot R_3$. Поэтому, будем в дальнейшем выражать радиус в единицах R_3 . То есть

$$(R/R_3)^2 = 1 + (R_B/R_3)^2 - 2(R_B/R_3) \cdot \cos(\varphi_B).$$

В целом,

$$L = \text{const} \cdot \frac{1 - \cos(\varphi_B + \varphi_3)}{(R/R_3)^2} = \text{const} \cdot \frac{1 - \cos(\varphi_B + \varphi_3)}{1 + (R_B/R_3)^2 - 2(R_B/R_3) \cdot \cos(\varphi_B)}. \quad (*)$$

Углы φ_B и φ_3 связаны соотношением

$$R \cdot \sin(\varphi_3) = R_B \cdot \sin(\varphi_B) \Rightarrow \sin(\varphi_3) = \frac{R_B}{R} \cdot \sin(\varphi_B).$$

При известных φ_B и R , можно рассчитывать φ_3 по формуле

$$\varphi_3 = \arcsin\left(\frac{R_B}{R} \cdot \sin(\varphi_B)\right),$$

после чего построить зависимость $L(R)$ по формуле (*). С другой стороны, можно учесть следующие соотношения:

$$\cos(\varphi_B + \varphi_3) = \cos \varphi_B \cdot \cos \varphi_3 - \sin \varphi_B \cdot \sin \varphi_3,$$

$$R \cdot \cos \varphi_3 = R_3 - R_B \cdot \cos \varphi_B \Rightarrow \cos \varphi_3 = \frac{1 - (R_B/R_3) \cdot \cos \varphi_B}{(R/R_3)}.$$

После подстановки этих соотношений в формулу (*):

$$L = \text{const} \cdot \frac{(R/R_3) + (R_B/R_3) - \cos(\varphi_B)}{(R/R_3)^3}. \quad (**)$$

Для того, чтобы найти максимум L , можно продифференцировать L по (R/R_3) и потребовать равенства этой производной нулю. Такое дифференцирование представляется слишком сложным на школьном уровне, поэтому в задаче предложено оценить положение максимума с помощью графика. При варьировании (R/R_3) нужно учитывать, что

$$\cos(\varphi_B) = \frac{1 + (R_B/R_3)^2 - (R/R_3)^2}{2(R_B/R_3)}.$$

При получении таблицы значений, учтём, что минимальное возможное значение R/R_3 равно $1 - R_B/R_3 = 0.27$.

Таблица. Яркость Венеры в зависимости от расстояния до Земли

R/R_3	$\cos(\varphi_B)$	L/const
0.3	0.99	1.73
0.35	0.96	2.78
0.4	0.94	3.04
0.45	0.91	3.00
0.5	0.88	2.84
0.55	0.84	2.65

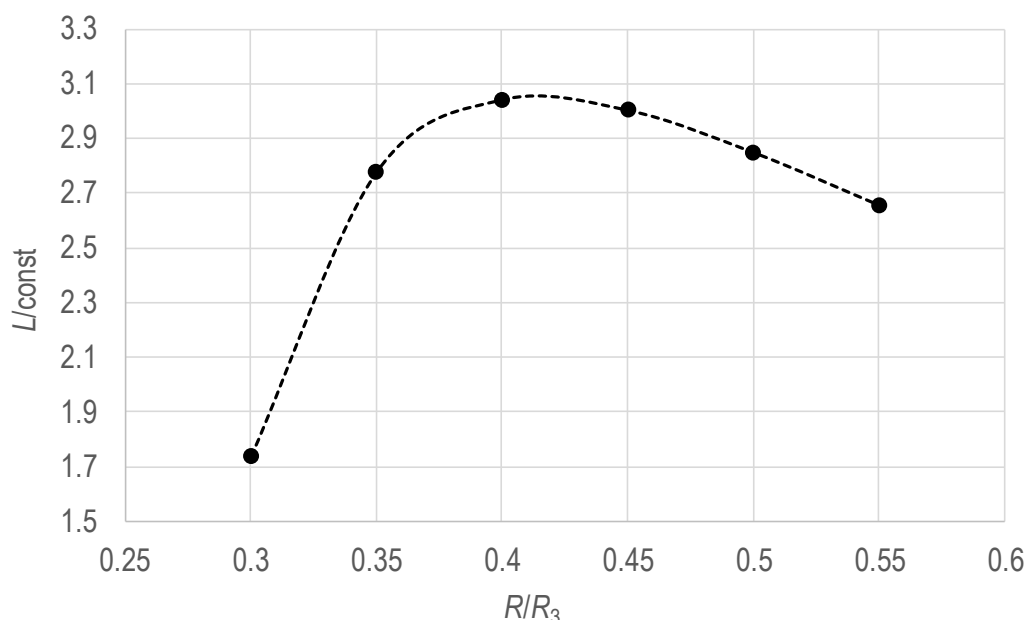


Рисунок 2. Яркость Венеры в зависимости от расстояния до Земли.

Из Таблицы и Рисунка 2 видно, что максимум яркости Венеры достигается на расстоянии $R/R_3 \approx 0.4$, что является ответом задачи.

Ответ: $R(L_{\text{макс}}) = 0.4$ астрономических единиц (а.е.)

Рекомендуемые баллы:

Понимание причин изменения яркости Венеры в зависимости от положения относительно Земли и Солнца – **до 9 баллов**.

Получение зависимости яркости Венеры от координат (расстояний, углов), характеризующих её положение – **до 10 баллов**.

Построение графика яркости и определение положения максимума – **до 6 баллов**.

Задание 3. (25 баллов) Неисправное устройство связи

Туристическая группа попала в нештатную ситуацию, для выхода из которой потребовалась срочно связаться с органами МЧС. Штатное устройство связи средневолнового (160м) диапазона вышло из строя. Радиолюбитель, входивший в состав группы, определил неисправность – вышел из строя конденсатор переменной емкости с диапазоном регулировки 0.2-2 нФ. С собой такой запчастей не оказалось. В рюкзаках туристической группы ему удалось найти рулон фольги для запекания, широкий скотч, рулон стрейч-пленки, линейку, нож, ножницы, плоскогубцы, отвертку, синюю изоляцию и несколько кусков проводов. Предложите туристу-радиолюбителю конструкцию конденсатора переменной емкости, изготовленную с применением перечисленных выше материалов и инструментов. Оцените электрические параметры получившегося изделия, учитывая электрическую постоянную ($8.854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м), относительные диэлектрические проницаемости воздуха (~ 1.00) и полиэтилена (2.25), другие данные для расчётов можно взять из общих соображений.

Решение

Любой конденсатор представляет собой перекрывающиеся изолированные друг от друга пластины проводящего материала, которые предназначены для накопления заряда. Существует множество конструкций конденсаторов, но для простоты расчёта рассмотрим конденсатор с плоской структурой. Ёмкость такого конденсатора определяется формулой:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}, \quad (1)$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды,
 ϵ_0 – электрическая постоянная,
 S – площадь перекрытия пластин,
 d – расстояние между пластинами.

По формуле видно, что ёмкость конденсатора можно изменять путём замены диэлектрика, изменением площади перекрытия и изменением расстояния между обкладками. Реализуем конструкцию, в которой меняется площадь.

Толщина стрейч-плёнки сравнима с толщиной фольги, порядка 30 мкм. Сделаем изолятор толщиной в 3 слоя плёнки. Будем считать, что общая толщина изолятора примерно 100 мкм = 0,1 мм. Для выбранной толщины изолятора рассчитаем необходимую площадь пластин. Из формулы (1) выразим площадь S :

$$S = \frac{Cd}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2)$$

$$S_{\min} = \frac{0,2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{2,25 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}} = \frac{0,2 \cdot 0,1}{2,25 \cdot 8,854} \text{ м}^2 = 0,001 \text{ м}^2 = 10 \text{ см}^2, \quad (3)$$

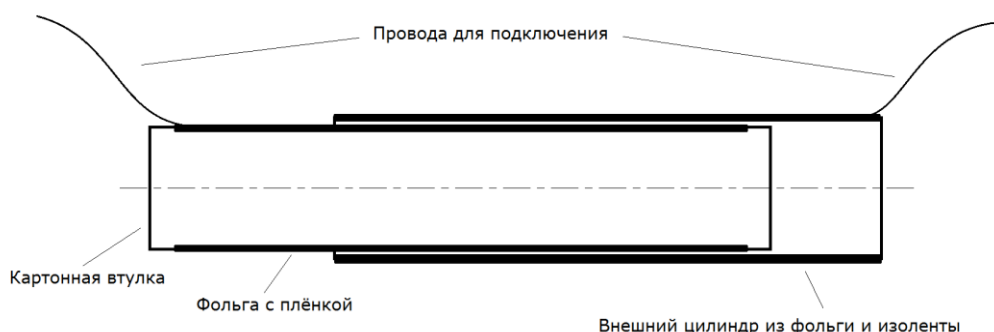
$$S_{\max} = 10 S_{\min} = 100 \text{ см}^2, \quad (4)$$

В качестве каркаса для конденсатора будем использовать картонную трубку, на которую намотана фольга. Оценим внешний диаметр картонной трубки как 2,5 см, а её длину 25 см. Тогда площадь поверхности трубки будет

$$S = \pi \cdot d \cdot L = \pi \cdot 2,5 \text{ см} \cdot 25 \text{ см} = 196 \text{ см}^2 \approx 2 \text{ дм}^2. \quad (2)$$

Эта площадь превышает необходимую, трубка в качестве каркаса подойдёт.

Аккуратно разматываем фольгу и освободим трубку. Далее на этой трубке оставим один слой фольги. Чтобы она не разматалась, прихватим края изолянтной. К одному из краёв трубки присоединим на ту же самую изолянтную провод. Провод можно зачистить ножницами/ножом/пассатижами. Заизолируем всю поверхность фольги плёнкой в несколько слоёв. За счёт свойств плёнки она цепляется сама за себя и не требует какой-то дополнительной фиксации. Поверх плёнки сделаем ещё один слой фольги, прикрепим проводок и обмотаем изолянтной либо плёнкой (этот внешний слой должен иметь некоторую жёсткость). Второй слой из фольги и изолятора делается так, чтобы он мог свободно перемещаться вдоль оси цилиндра. Эскиз конструкции конденсатора представлен на рисунке ниже.



При надевании второго слоя на трубку ёмкость конденсатора увеличивается, при вытаскивании уменьшается. Определим «чувствительность» такого конденсатора. Максимальная ёмкость достигается при полном надевании второго слоя на трубку. Учтём, что всё-таки между изолятором трубки и фольгой второго слоя может быть дополнительный зазор и для достижения ёмкости 2 нФ нужно полностью надеть его. Тогда изменение ёмкости при смещении на 1 см будет: $2 \text{ нФ} / 25 \text{ см} = 0,08 \text{ нФ/см}$. Это довольно хорошее значение, можно достаточно точно настроить приёмник.

Рекомендуемые баллы

Знание формулы ёмкости плоского конденсатора – **до 5 баллов**

Произведён расчёт площади/расстояния для получения необходимой ёмкости – **до 5 баллов**

Идея и описание процесса изготовления конденсатора – **до 10 баллов**

Приведены пояснительные рисунки – **до 5 баллов**

Задание 4. (25 баллов) Выравнивание штатива

Любитель астрономии собирается установить телескоп на штатив, имеющий форму симметричного треножника, как показано на Рисунке 1а. Угол между опорами штатива и его вертикальной осью составляет 30° , высота штатива до плоской площадки – 1 м. Поверхность, на которой установлен штатив, не совсем горизонтальна. Ориентацию площадки штатива можно контролировать с помощью установленного на ней пузырькового уровня, который представляет собой капсулу с жидкостью и воздушным пузырьком внутри (Рисунок 1б). Горизонтальному положению площадки соответствовало бы расположение пузырька в центре капсулы, однако он смещен на 1 см в направлении оси y , как показано на Рисунке 1б. Опоры штатива – телескопические, длину каждой из опор можно увеличивать (уменьшить нельзя). Какое минимальное изменение суммарной длины опор штатива позволит привести площадку в горизонтальное положение?

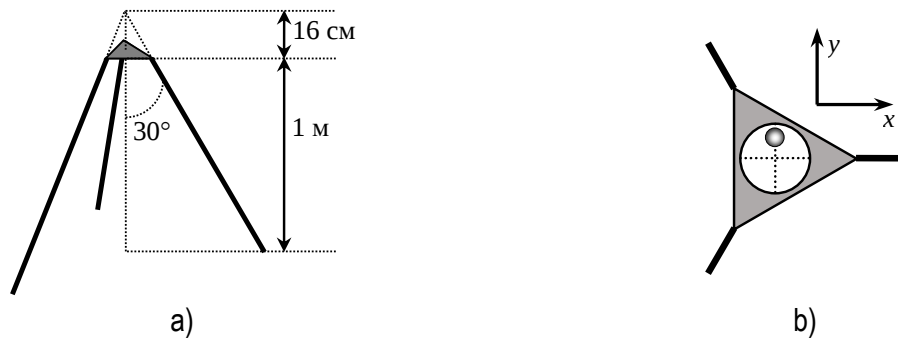


Рисунок 1. Треножник и пузырьковый уровень

Решение

Для горизонтального выравнивания площадки, центр капсулы пузырькового уровня нужно сместить в то положение, где находится пузырек, то есть на 1 см вдоль оси y . При этом, перемещение должно быть произведено таким образом, чтобы одна из опор штатива не изменила своей длины. Иначе суммарное увеличение длины опор не будет минимальным, поскольку все опоры возможно укоротить на одинаковую длину без изменения наклона площадки.

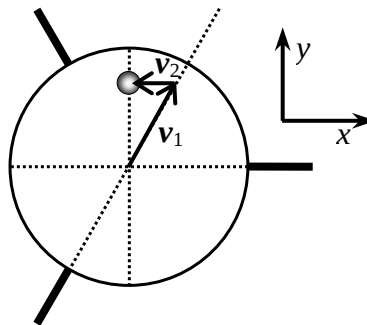


Рисунок 1. Перемещение центра пузырькового уровня к пузырьку посредством удлинения двух опор

Векторы перемещения центра пузырькового уровня к пузырьку показаны на Рисунке 1. Компонента вектора $\vec{v}_1$ вдоль оси y должна быть равна 1 см, тогда его длина составит

$$L_1 = \frac{1 \text{ см}}{\cos 30^\circ} = 1.15 \text{ см}.$$

Длина вектора $\vec{v}_2$:

$$L_2 = L_1 \cdot \sin 30^\circ = 0.58 \text{ см}.$$

Полученными длинами L_1 , L_2 определяются углы поворота вертикальной оси штатива, которые необходимо компенсировать удлинением опор. Если бы пузырьковый уровень был достаточно большим и плоским для точных измерений, то значения углов давались бы формулами

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{L_1}{H_0}\right) = 0.0115 \text{ рад} = 0.66^\circ,$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{L_2}{H_0}\right) = 0.0058 \text{ рад} = 0.33^\circ.$$

В настоящей задаче точность исходных данных такова, что синусы и тангенсы таких малых углов, как φ_1 и φ_2 , можно принять равными самим углам, выраженным в радианах. С точностью до двух и даже трех значащих цифр, значения не меняются:

$$\varphi_1 = \frac{L_1}{H_0} = 0.0115 \text{ рад} = 0.66^\circ,$$

$$\varphi_2 = \frac{L_2}{H_0} = 0.0058 \text{ рад} = 0.33^\circ.$$

В формулах выше $H_0 = 1 \text{ м}$ – это высота, на которой расположен пузырьковый уровень.

В силу малости углов, будем считать, что расчет коррекции каждого из них можно провести, принимая второй из углов равным нулю. Рассматриваемые углы совпадают с углами отклонения поверхности, на которой установлен штатив, от горизонтали, как показано на Рисунке 2.

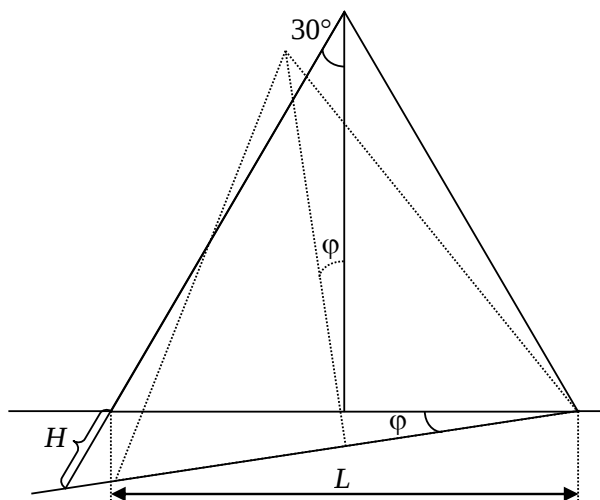


Рисунок 2. Схема компенсации отклонения штатива от вертикального положения. Сплошными линиями показано вертикальное положение штатива с удлинённой опорой, прерывистыми линиями – начальное положение штатива. H – величина удлинения опоры.

На Рисунке 2 угол φ – это угол отклонения оси штатива от вертикали, равный углу наклона горизонтальной плоскости, на которой установлен штатив. Длина L для штатива, имеющего форму пирамиды – это высота треугольного основания, образованного нижними концами опор (поскольку при удлинении одной из опор штатив вращается вокруг оси, соединяющей концы двух других опор). В настоящей задаче

$$L = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{tg}(30^\circ) \cdot 1.16 \text{ м} = 1.00 \text{ м}.$$

Можно показать, что длина H на Рисунке 2 даётся формулой

$$H = \frac{L \sin \varphi}{(1 - \sin(\varphi) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ)) \cos(30^\circ)}.$$

Снова, синусы углов φ_1 и φ_2 в этой формуле можно принимать равными самим углам, выраженным в радианах. Получается, что

$$H(\varphi_1) = 1.35 \text{ см}, H(\varphi_2) = 0.67 \text{ см}, H(\varphi_1) + H(\varphi_2) = 2.02 \text{ см}.$$

Ответ: суммарное удлинение опор составит 2.0 см.

Рекомендуемые баллы:

Понимание принципа работы пузырькового уровня – **до 5 баллов**.

Расчет углов, на которые нужно сместить ось штатива – **до 10 баллов**.

Установление связи между поворотом оси штатива и удлинением опор – **до 6 баллов**.

Получение правильного ответа на основании предыдущих результатов – **до 4 баллов**.