Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) **Черная дыра в газовом облаке**

Черная дыра массы $M = 2\cdot10^{31}$ кг, которую можно рассматривать как точечный источник гравитационного поля, движется через однородное облако молекулярного водорода с постоянной скоростью, равной 20 км/с. Какую массу вещества сможет поглотить эта черная дыра на пути длиной в один световой год (расстояние, которое свет проходит за год), если она захватывает молекулы водорода, приближающиеся на расстояния менее 300 км? Потенциальную энергию молекулы водорода массы m в гравитационном поле «дыры» рассчитывать по формуле $E_{пот} = -G\cdot M\cdot m/R$, где R – расстояние до её центра, $G = 6.67430\cdot10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$ – гравитационная постоянная. Скорость света принять равной $3\cdot10^8$ м/с. Концентрация молекул водорода в облаке равна 10^4 частиц/см^3. Изменением гравитационного поля, связанным с увеличением массы черной дыры, пренебречь.

Решение

Пусть черная дыра движется сквозь газовое облако по прямой. Эту прямую можно рассмотреть в качестве оси цилиндра, длина которого равна 1 световому году, а радиус равен некоторому критическому значению $R_{крит}$. Молекулы водорода, расположенные внутри этого цилиндра, будут захвачены «дырой», тогда как молекулы вне цилиндра захвачены не будут. Ниже, найдём радиус цилиндра $R_{крит}$.

Для того, чтобы проще описать взаимодействие частиц облака с центром притяжения, выберем «дыру» в качестве начала координат системы отсчета, движущейся со скоростью V = 10 км/с. В этой системе отсчета черная дыра покоится, тогда как вещество облака движется мимо неё со скоростью v_0 = 10 км/с. Молекулы водорода будут приближаться к «дыре» за счет гравитационного притяжения.

Отметим, что несмотря на очень низкую плотность, молекулярное облако в космических масштабах можно рассматривать как сплошную среду (идеальный газ), поскольку длина свободного пробега молекул водорода составляет около 0.05 астрономических единицы, что мало по сравнению с характерными для космоса расстояниями. Однако, в данной задаче скорость движения молекул относительно «дыры» намного более высока, чем скорость теплового движения молекул (0.8 км/с при температуре облака, равной 50 K). Это значит, что близкие молекулы водорода можно считать покоящимися друг относительно друга, вокруг центра «дыры» они будут двигаться одинаково, и свойства сплошной среды не проявятся. Таким образом, ниже рассмотрим движение молекулы относительно черной дыры так, как если бы оно происходило в вакууме.

В качестве модельного представления, задача предполагает, что на расстояниях менее 300 км от центра черной дыры описывать движение частиц без взаимодействия с окружением уже нельзя, из-за высокой плотности вещества. Поэтому условие задачи предполагает, что на меньших расстояниях черная дыра «автоматически» захватывает частицы. На Рисунке 1 схематически показана траектория молекулы, избегающей захвата.

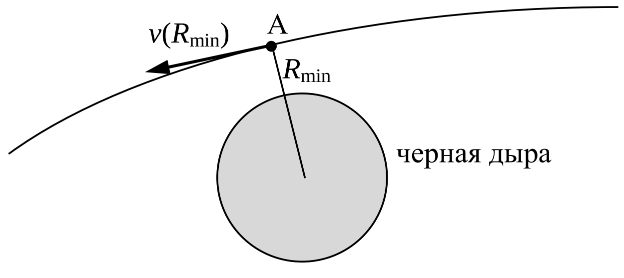


Рисунок 1. Минимальное расстояние от молекулы до черной дыры

При движении молекулы в гравитационном поле будут сохраняться полная механическая энергия, а также момент импульса. На большом расстоянии от центра притяжения потенциальная энергия $E_{пот}$ стремится к нулю, тогда как кинетическая энергия далёких молекул массы m в системе отсчета, неподвижной относительно черной дыры, даётся формулой

$$E_{кин} = mv_0^2/2.$$

Момент импульса можно рассчитать как векторное произведение радиус-вектора, соединяющего молекулу с центром «дыры», и вектора скорости частицы относительно нее. На больших расстояниях

$$\vec{M} = m \cdot \left(\vec{R} \times \vec{v}_0\right)$$

Вектор $\vec{M}$ сохраняет свои значение и направление, будучи перпендикулярным к векторам $\vec{R}$ и $\vec{v}_0$, откуда следует, что движение молекулы вокруг «дыры» всё время происходит в одной и той же плоскости. Значение модуля момента импульса

$$\left|\vec{M}\right| = m \cdot \left|\vec{R}\right| \cdot \left|\vec{v}_0\right| \cdot \sin\left(\vec{R} \wedge \vec{v}_0\right) = m \cdot v_0 \cdot b,$$

где b – начальное расстояние между молекулой и осью x, показанное на Рисунке 2.

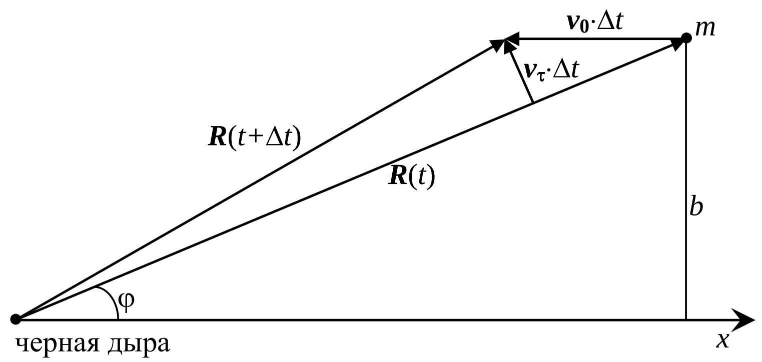


Рисунок 2. К расчету момента импульса молекулы на большом расстоянии от черной дыры.

Без использования векторной формы, момент импульса молекулы можно получить через произведение расстояния R и компоненты вектора $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно вектору $\vec{R}$. Иллюстрация такого подхода приведена на Рисунке 2. Компонента скорости v_τ фактически представляет собой движение вдоль участка окружности, радиус которой совпадает с текущим расстоянием R от центра притяжения до молекулы:

$$\left|\vec{M}\right| = m \cdot R \cdot v_\tau = m \cdot R \cdot v_0 \cdot \sin\varphi = m \cdot R \cdot v_0 \cdot (b / R) = m \cdot v_0 \cdot b.$$

На Рисунке 2 $R(t+\Delta t) \approx R(t)$, если расстояние R велико по сравнению с $v_0 \cdot \Delta t$.

В точке А, ближайшей к центру черной дыры (Рисунок 1), вектор скорости направлен перпендикулярно радиус-вектору. Это значит, что момент импульса здесь равен $m \cdot v \cdot R_{min}$, так что

$$v\left(R_{min}\right) \cdot R_{min} = v_0 \cdot b.$$

Закон сохранения энергии при этом даст

$$\frac{mv\left(R_{min}\right)^2}{2} - G\frac{M \cdot m}{R_{min}} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Пусть $R_{\min}$ совпадает с радиусом захвата молекул «дырой» (300 км). Соответствующее значение b в этом случае совпадёт с критическим радиусом цилиндра $R_{крит}$, внутри которого находятся захватываемые молекулы. Таким образом

$$v\left(R_{\min}\right)=\sqrt{v_0^2+\frac{2GM}{R_{\min}}}=94075\ \text{км/с},$$

откуда

$$R_{крит}=\frac{v\left(R_{\min}\right)\cdot R_{\min}}{v_0}=\sqrt{R_{\min}^2+\frac{2GM\cdot R_{\min}}{v_0^2}}=1.41\cdot 10^6\ \text{км}.$$

Объём цилиндра, внутри которого будут поглощены молекулы:

$$V=\pi\cdot R_{крит}^2\cdot\left(1\,\text{св. год}\right)=5.9\cdot 10^{25}\ \text{км}^3.$$

Использовано значение 1 св. год = $9.46\cdot 10^{12}$ км. Массу поглощенного вещества получаем умножением объёма на плотность, с учетом того, что масса молекулы водорода равна 2 а.е.м., то есть $3.32\cdot 10^{-27}$ кг. В результате $M_{погл} = 2.0\cdot 10^{18}$ кг. Эта масса очень мала по сравнению с массой черной дыры, так что изменением гравитационной силы в процессе движения при решении задачи можно было пренебречь.

Ответ: $M_{погл} = 2.0\cdot 10^{18}$ кг.

Задание 2. (25 баллов) **Яркость Венеры**

Принять, что Земля и Венера вращаются вокруг Солнца по круговым орбитам с радиусами $R_З = 147\cdot 10^6$ км, $R_В = 108\cdot 10^6$ км. Считать, что яркость Венеры пропорциональна освещенной площади её диска, видимого с Земли. Построить график зависимости яркости Венеры от её расстояния до Земли, позволяющий определить положение максимума яркости. Оценить положение этого максимума с точностью, не худшей, чем 0.1 астрономической единицы ($0.1\cdot R_З$). Считать, что освещенная часть поверхности Венеры, как и часть поверхности, видимая с Земли, представляют собой полусферы, ограниченные плоскими сечениями α и β, проходящими через центр Венеры. Освещенную площадь диска Венеры, видимого с Земли, рассчитывать по формуле $S = \pi\cdot r^2\cdot(1 - \cos(\varphi))/2$, где φ - угол между сечениями α и β, r – радиус видимого диска.

Решение

Для изучения яркости Венеры, рассмотрим Рисунок 1. Буквой S на Рисунке обозначена область на поверхности Венеры, которая одновременно освещена Солнцем и видима с Земли. Также, на Рисунке 1 показаны сечения α и β, пересекающиеся под углом φ. Проекция области S на диск Венеры, обращенный к Земле, имеет форму месяца, который схематически показан на том же Рисунке. Именно площадь этого месяца, как доля от площади диска Венеры, даётся формулой $S = (1 - \cos(\varphi))/2$, приведенной в условии задачи.

На Рисунке 1, угол φ является суммой углов φ_1 и φ_2. В свою очередь, угол φ_1 равен $90^\circ - \gamma_1$, тогда как $\gamma_1 = 90^\circ - \varphi_В$. Таким образом,

$$\varphi_1 = 90^\circ - (90^\circ - \varphi_В) = \varphi_В.$$

Аналогично,

$$\varphi_2 = 90^\circ - (90^\circ - \varphi_З) = \varphi_З.$$

Получили, что

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_З + \varphi_В.$$

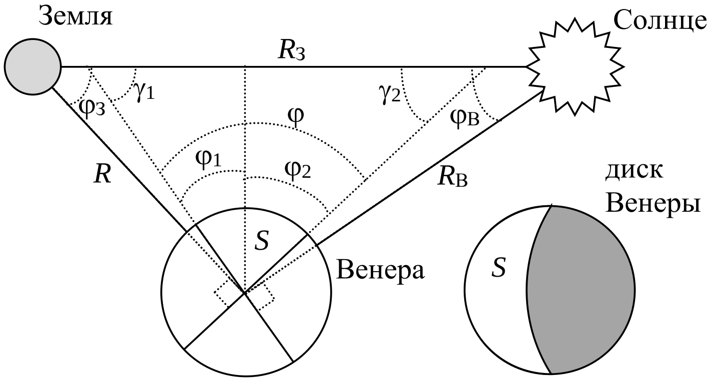


Рисунок 1. Положение и освещенность Венеры.

Яркость L Венеры, видимой с Земли, пропорциональна величине

$$S = (1 - \cos(\varphi))/2 = (1 - \cos(\varphi_3 + \varphi_B))/2.$$

Одновременно, яркость L будет пропорциональна телесному углу Ω, который Венера занимает на небе. Этот угол равен площади сечения Венеры, проходящего через её центр, деленной на квадрат расстояния до Венеры и на 4π. Площадь сечения – константа. Квадрат расстояния даётся формулой

$$R^2 = R_3^2 + R_B^2 - 2R_3R_B \cdot \cos(\varphi_B).$$

Согласно условию задачи, положение максимума яркости нужно определить с точностью до $0.1 \cdot R_3$. Поэтому, будем в дальнейшем выражать радиус в единицах R_3. То есть

$$(R/R_3)^2 = 1 + (R_B/R_3)^2 - 2(R_B/R_3) \cdot \cos(\varphi_B).$$

В целом,

$$L = \text{const} \cdot \frac{1-\cos(\varphi_B + \varphi_3)}{(R/R_3)^2} = \text{const} \cdot \frac{1-\cos(\varphi_B + \varphi_3)}{1 + (R_B/R_3)^2 - 2(R_B/R_3) \cdot \cos(\varphi_B)}. \quad (*)$$

Углы φ_B и φ_3 связаны соотношением

$$R \cdot \sin(\varphi_3) = R_B \cdot \sin(\varphi_B) \Rightarrow \sin(\varphi_3) = \frac{R_B}{R} \cdot \sin(\varphi_B).$$

При известных φ_B и R, можно рассчитывать φ_3 по формуле

$$\varphi_3 = \arcsin\left(\frac{R_B}{R} \cdot \sin(\varphi_B)\right),$$

после чего построить зависимость $L(R)$ по формуле (*). С другой стороны, можно учесть следующие соотношения:

$$\cos(\varphi_B + \varphi_3) = \cos\varphi_B \cdot \cos\varphi_3 - \sin\varphi_B \cdot \sin\varphi_3,$$

$$R \cdot \cos\varphi_3 = R_3 - R_B \cdot \cos\varphi_B \Rightarrow \cos\varphi_3 = \frac{1 - (R_B/R_3) \cdot \cos\varphi_B}{(R/R_3)} \cdot$$

После подстановки этих соотношений в формулу (*):

$$L = \text{const} \cdot \frac{(R/R_3) + (R_B/R_3) - \cos(\varphi_B)}{(R/R_3)^3}. \quad (**)$$

Для того, чтобы найти максимум L, можно продифференцировать L по ($R/R_З$) и потребовать равенства этой производной нулю. Такое дифференцирование представляется слишком сложным на школьном уровне, поэтому в задаче предложено оценить положение максимума с помощью графика. При варьировании ($R/R_З$) нужно учитывать, что

$$\cos(\varphi_B) = \frac{1 + (R_B/R_З)^2 - (R/R_З)^2}{2(R_B/R_З)}.$$

При получении таблицы значений, учтём, что минимальное возможное значение $R/R_З$ равно 1 - $R_В/R_З$ = 0.27.

Таблица. Яркость Венеры в зависимости от расстояния до Земли

$R/R_З$	$\cos(\varphi_В)$	L/const
0.3	0.99	1.73
0.35	0.96	2.78
0.4	0.94	3.04
0.45	0.91	3.00
0.5	0.88	2.84
0.55	0.84	2.65

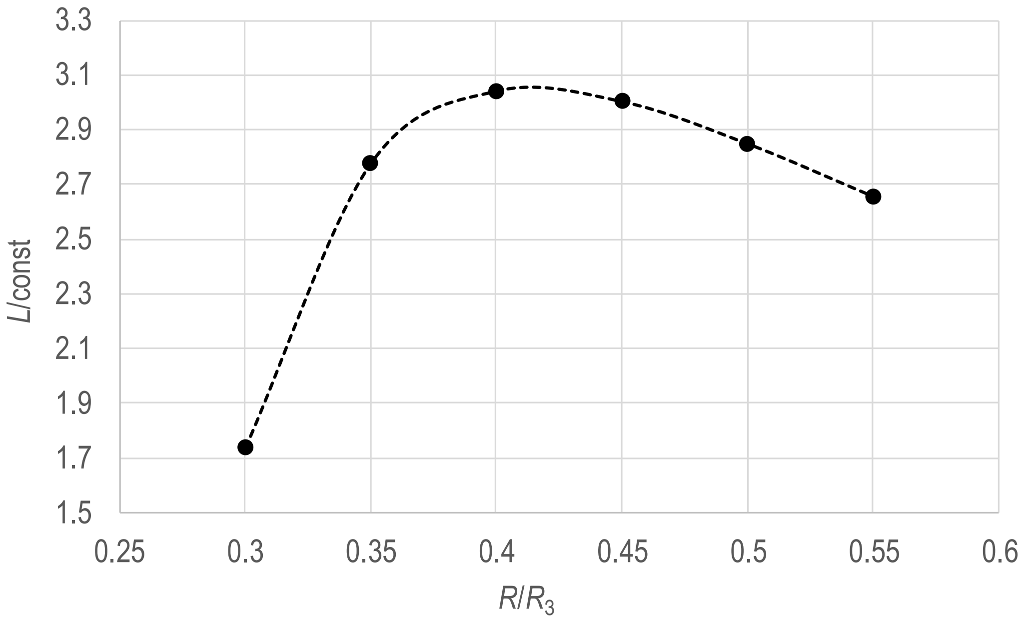


Рисунок 2. Яркость Венеры в зависимости от расстояния до Земли.

Из Таблицы и Рисунука 2 видно, что максимум яркости Венеры достигается на расстоянии $R/R_З \approx 0.4$, что является ответом задачи.

Ответ: $R(L_{макс})$ = 0.4 астрономических единиц (а.е.)

Задание 3. (25 баллов) **Неисправное устройство связи**

Туристическая группа попала в нештатную ситуацию, для выхода из которой потребовалась срочно связаться с органами МЧС. Штатное устройство связи средневолнового (160м) диапазона вышло из строя. Радиолюбитель, входивший в состав группы, определил неисправность – вышел из строя конденсатор переменной емкости с диапазоном регулировки 0.2-2 нФ. С собой такой запчасти не оказалось. В рюкзаках туристической группы ему удалось найти рулон фольги для запекания, широкий скотч, рулон стрейч-пленки, линейку, нож, ножницы, плоскогубцы, отвертку, синюю изоленту и несколько кусков проводов. Предложите туристу-радиолюбителю конструкцию конденсатора переменной емкости, изготовленную с применением перечисленных выше материалов и инструментов. Оцените электрические параметры получившегося изделия, учитывая электрическую постоянную (8.854·10−12 Ф/м), относительные диэлектрические проницаемости воздуха (~1.00) и полиэтилена (2.25), другие данные для расчётов можно взять из общих соображений.

Решение

Любой конденсатор представляет собой перекрывающиеся изолированные друг от друга пластины проводящего материала, которые предназначены для накопления заряда. Существует множество конструкций конденсаторов, но для простоты расчёта рассмотрим конденсатор с плоской структурой. Ёмкость такого конденсатора определяется формулой:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \qquad (1)$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды,
ε_0 – электрическая постоянная,
S – площадь перекрытия пластин,
d – расстояние между пластинами.

По формуле видно, что ёмкость конденсатора можно изменять путём замены диэлектрика, изменением площади перекрытия и изменением расстояния между обкладками. Реализуем конструкцию, в которой меняется площадь.

Толщина стрейч-плёнки сравнима с толщиной фольги, порядка 30 мкм. Сделаем изолятор толщиной в 3 слоя плёнки. Будем считать, что общая толщина изолятора примерно 100 мкм = 0,1 мм. Для выбранной толщины изолятора рассчитаем необходимую площадь пластин. Из формулы (1) выразим площадь S:

$$S = \frac{Cd}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

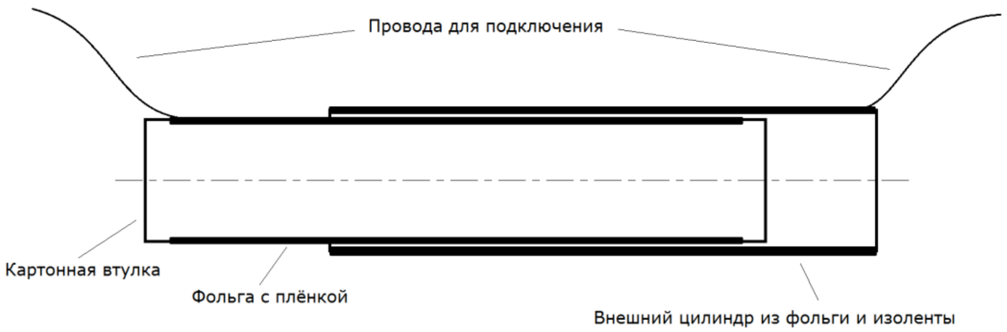
$$S_{\min} = \frac{0,2\cdot10^{-9}\mathit{Ф}\cdot0,1\cdot10^{-3}\mathit{м}}{2,25\cdot8,854\cdot10^{-12}\mathit{Ф}/\mathit{м}} = \frac{0,2\cdot0,1}{2,25\cdot8,854}\mathit{м}^2 = 0,001\mathit{м}^2 = 10\mathit{см}^2, \qquad (3)$$

$$S_{\max} = 10S_{\min} = 100\mathit{см}^2, \qquad (4)$$

В качестве каркаса для конденсатора будем использовать картонную трубку, на которую намотана фольга. Оценим внешний диаметр картонной трубки как 2,5 см, а её длину 25 см. Тогда площадь поверхности трубки будет

$$S = \pi\cdot d\cdot L = \pi\cdot2,5\mathit{см}\cdot25\mathit{см} = 196\mathit{см}^2 \approx 2\mathit{дм}^2. \qquad (2)$$

Эта площадь превышает необходимую, трубка в качестве каркаса подойдёт.
Аккуратно размотаем фольгу и освободим трубку. Далее на этой трубке оставим один слой фольги. Чтобы она не размоталась, прихватим края изолентой. К одному из краёв трубки присоединим на ту же самую изоленту провод. Провод можно зачистить ножницами/ножом/пассатижами. Заизолируем всю поверхность фольги плёнкой в несколько слоёв. За счёт свойств плёнки она цепляется сама за себя и не требует какой-то дополнительной фиксации. Поверх плёнки сделаем ещё один слой фольги, прикрепим проводок и обмотаем изолентой либо плёнкой (этот внешний слой должен иметь некоторую жёсткость). Второй слой из фольги и изолятора делается так, чтобы он мог свободно перемещаться вдоль оси цилиндра. Эскиз конструкции конденсатора представлен на рисунке ниже.



При надевании второго слоя на трубку ёмкость конденсатора увеличивается, при вытаскивании уменьшается. Определим «чувствительность» такого конденсатора. Максимальная ёмкость достигается при полном надевании второго слоя на трубку. Учтём, что всё-таки между изолятором трубки и фольгой второго слоя может быть дополнительный зазор и для достижения ёмкости 2 нФ нужно полностью надеть его. Тогда изменение ёмкости при смещении на 1 см будет: 2 нФ / 25 см = 0,08 нФ/см. Это довольно хорошее значение, можно достаточно точно настроить приёмник.

Рекомендуемые баллы
Знание формулы ёмкости плоского конденсатора **– до 5 баллов**
Произведён расчёт площади/расстояния для получения необходимой ёмкости **– до 5 баллов**
Идея и описание процесса изготовления конденсатора **– до 10 баллов**
Приведены пояснительные рисунки **– до 5 баллов**

Задание 4. (25 баллов) **Световая волна на плоской границе**
Космическая вспышка порождает световую волну, фронт которой имеет форму сферы и распространяется во все стороны со скоростью света с. Эта волна пересекает плоскую границу пылевого облака, при этом линия пересечения границы облака сферическим фронтом волны представляет собой кольцо радиуса *r*. С какой скоростью будет увеличиваться значение *r* в момент, когда *r* станет равным 0.1 от радиуса сферического фронта волны?

Решение

Пересечение сферического фронта волны с плоской границей показано на Рисунке.

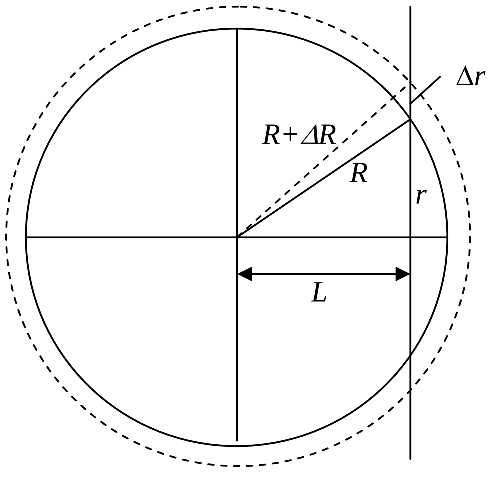


Рисунок. Схема пересечения сферической волны с плоской границей

Из Рисунка видно, что радиус кольца, представляющего собой пересечение сферы с плоской границей –

$$r = \sqrt{R^2 - L^2}\ ,$$

где L – постоянное расстояние между плоскостью и центром сферы. Связать скорости изменения радиусов $R(t)$ и $r(t)$ теперь можно дифференцированием по времени t:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2R}{2\sqrt{R^2 - L^2}} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{R}{r} \cdot \frac{dR}{dt}\ .$$

Учитывая, что скорость распространения световой волны dR/dt = c = 3·10⁸ м/с, и что r = 0.1·R, получаем

$$\frac{dr}{dt} = 10 \cdot c = 3 \cdot 10^9 \text{ м/с.}$$

Без дифференцирования, можно использовать малые приращения координат и времени:

$$r^2 = R^2 - L^2 \Rightarrow \left(r + \Delta r\right)^2 - r^2 = 2r \cdot \Delta r + \left(\Delta r\right)^2 = \left(R + \Delta R\right)^2 - R^2 = 2R \cdot \Delta R + \left(\Delta R\right)^2.$$

Здесь можно пренебречь квадратами малых приращений, и получить

$$r \cdot \Delta r = R \cdot \Delta R \Rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{R}{r} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{R}{r} \cdot c\ ,$$

что совпадает с результатом дифференцирования.

Отметим, что изменение радиуса r со скоростью, превышающей скорость света, вполне допустимо, поскольку переноса энергии вместе с ним не происходит.

Ответ: $3 \cdot 10^9$ м/с.