

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Плавление метеорита

Рассмотрим упрощенную модель плавления метеорита, летящего сквозь земную атмосферу, согласно которой его внешние слои разогреваются до температуры плавления, плавятся, а затем сдуваются потоком воздуха. Будем считать, что внутренняя область метеорита остаётся холодной (имеет температуру, равную 270 К), пока не оказывается в прямом контакте с атмосферой. Пусть разогрев некоторого метеорита происходит только за счет его кинетической энергии, которая пропорциональна исходной массе. Когда эта энергия будет израсходована, данный метеорит потеряет 90 % своей массы, если его разогрев и плавление будут соответствовать модели, описанной выше. Альтернативная модель может состоять в том, что весь метеорит сначала прогревается до температуры плавления (1800 К), а затем плавится до тех пор, пока не будет израсходована вся кинетическая энергия. Расплавленные слои уносятся потоком воздуха, аналогично первой модели. Какую часть массы потеряет тот же самый метеорит при плавлении, описываемом второй моделью? Теплоемкость метеорита принять равной 600 Дж/кг·К, удельную теплоту плавления – равной 280 кДж/кг.

Решение

Пусть v^2 – начальная скорость метеорита, связанная с кинетической энергией и массой соотношением

$$E_{\text{кин}} = mv^2 / 2.$$

Обозначим через Δm_1 массу, которую метеорит потеряет, если будет плавиться согласно первой модели. В этом случае, вся кинетическая энергия пойдёт на нагрев и плавление именно этой массы, так что

$$mv^2 / 2 = \Delta m_1 \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda),$$

где $c = 600$ Дж/кг – удельная теплоемкость метеорита, $\Delta T = 1800 - 270 = 1530$ К – изменение температуры его расплавившихся слоев. Соответственно,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\Delta m_1}{m} \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) = (90\%) \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) = 0.9 \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) = 1078200 \text{ Дж/кг}.$$

Пусть Δm_2 – масса, которую метеорит теряет в рамках второй модели плавления. Здесь, до температуры плавления разогревается вся масса метеорита, расплавлена же будет только масса Δm_2 :

$$mv^2 / 2 = m \cdot c \cdot \Delta T + \lambda \cdot \Delta m_2.$$

Теперь,

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} &= c \cdot \Delta T + \lambda \cdot \frac{\Delta m_2}{m} = 0.9 \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) \Rightarrow \\ \frac{\Delta m_2}{m} &= \frac{0.9 \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) - c \cdot \Delta T}{\lambda} = 0.9 - 0.1 \cdot \frac{c \cdot \Delta T}{\lambda} = 0.572 = 57.2\%. \end{aligned}$$

Ответ: при плавлении по второй модели метеорит потеряет 57.2 % массы.

Рекомендуемые баллы:

За понимание связи между кинетической энергией и массой метеорита – до 4 баллов

За правильное использование теплоемкости – до 4 баллов

За правильное использование удельной теплоты плавления – до 4 баллов

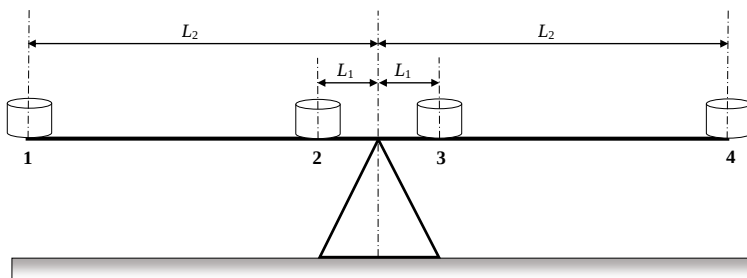
За правильное применение первой модели плавления метеорита - до 6 баллов.

За правильное применение второй модели плавления метеорита - до 6 баллов.

За правильный численный ответ - до 1 балла.

Задание 2. (25 баллов) Космические весы

Представитель чрезвычайно технологичной цивилизации построил рычажные весы, показанные на Рисунке. В чашу № 1 он поместил чайную ложку вещества нейтронной звезды, масса которой равна 1 миллиарду тонн. Чаша № 2 оставлена свободной, тогда как в чаше № 3 находится чайная ложка с веществом из черной дыры с массой, равной 3 миллиардам тонн. Для того, чтобы сбалансировать весы, в чаше 4 размещена такая масса m , что произведение $m \cdot L_2$ равно $5 \cdot 10^{12}$ кг·м. Весы остаются сбалансированными, если ложку из чаши № 3 переместить в чашу № 2, а ложку из чаши № 1 – в чашу № 3. Найти длины L_1 , L_2 .



Решение

Для того, чтобы весы находились в равновесии, необходимо равенство суммы произведений масс каждой из чаш на расстояния до них от точки, где закреплён рычаг. Если измерять массы в миллиардах тонн, то уравнение баланса начальной конфигурации весов запишется в виде

$$L_2 = 3 \cdot L_1 + 5 \text{ метров}.$$

После перемещения масс, указанного в задаче, уравнение баланса преобразуется к виду

$$3 \cdot L_1 = L_1 + 5 \text{ метров},$$

откуда $2 \cdot L_1 = 5$ м, так что $L_1 = 2.5$ м. Подстановка этого результата в первое из уравнений даёт $L_2 = 12.5$ м.

Ответ: $L_1 = 2.5$ м, $L_2 = 12.5$ м.

Рекомендуемые баллы:

За понимание принципов балансирования весов – до 4 баллов

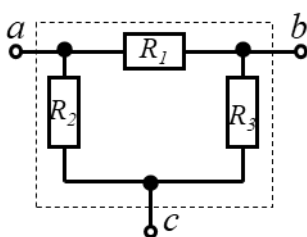
За правильное уравнение баланса в первой конфигурации – до 6 баллов

За правильное уравнение баланса во второй конфигурации – до 6 баллов

За получение значения L_1 - до 4 баллов.

За получение значения L_2 - до 5 баллов.

Задание 3. (25 баллов) П-образный аттенюатор

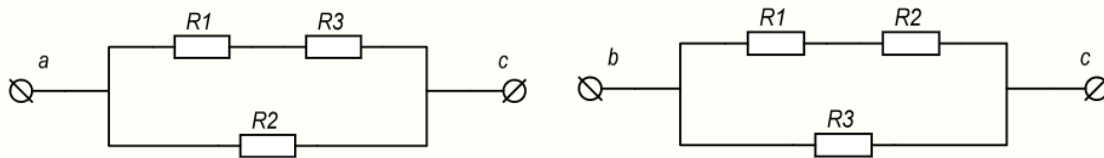


Мастер, ремонтируя радиоприемник, обнаружил вышедшие из строя несколько одинаковых П-образных аттенюаторов. К сожалению, замену аттенюаторам найти не удалось, а к счастью, один из аттенюаторов остался полностью работоспособным. Исследуя его устройство, мастер смог восстановить принципиальную электрическую схему, представленную на рисунке, и обнаружил что номинал резистора R_1 по маркировке составил 50 Ом, а маркировка на двух резисторах R_2 и R_3 в результате термического воздействия не читается. Для изготовления вышедших из строя

аттенюаторов определите значения сопротивлений резисторов R_2 и R_3 , если измеренное электрическое сопротивление между точками **a** и **c** составило 29.33 Ом, между точками **b** и **c** составило 36 Ом.

Решение

Для более простого восприятия схему можно перерисовать в зависимости от места подключения измерительного прибора.



Для обоих случаев наблюдаем параллельное соединение одиночного резистора с двумя последовательно соединёнными. Рассмотрим случай подключения между точками **a** и **c**. Резисторы R_1 и R_3 соединены последовательно, общее сопротивление верхней ветви будет $R_{13} = R_1 + R_3$. К ним параллельно подключён резистор R_2 . Сопротивление между точками **a** и **c** можно записать как:

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2}. \quad (1)$$

Аналогично получаем выражение для R_{bc} :

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (2)$$

В итоге получили систему из двух уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными R_2 и R_3 . Из первого уравнения выразим R_2 :

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_{ac}} - \frac{1}{R_1 + R_3}} = \frac{R_{ac}(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_{ac}}. \quad (3)$$

Перед подстановкой выполним преобразование уравнения (2), приведём его в «одноэтажному» виду умножением на $(R_1 + R_2)R_3R_{bc}$:

$$(R_1 + R_2)R_3 = R_3R_{bc} + (R_1 + R_2)R_{bc}. \quad (4)$$

Теперь подставим (3) в (4):

$$\left(R_1 + \frac{R_{ac}(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_{ac}} \right) R_3 = R_3R_{bc} + \left(R_1 + \frac{R_{ac}(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_{ac}} \right) R_{bc}. \quad (5)$$

Умножим обе части уравнения на $R_1 + R_3 - R_{ac}$ и раскроем все скобки:

$$\begin{aligned} R_1^2 R_3 + R_1 R_3^2 - \underline{R_1 R_3 R_{ac}} + \underline{R_1 R_3 R_{ac}} + R_3^2 R_{ac} = \\ = R_1 R_3 R_{bc} + R_3^2 R_{bc} - \underline{R_3 R_{ac} R_{bc}} + R_1^2 R_{bc} + R_1 R_3 R_{bc} - \underline{R_1 R_{ac} R_{bc}} + \underline{R_1 R_{ac} R_{bc}} + \underline{R_3 R_{ac} R_{bc}} \end{aligned} \quad (6)$$

После приведения подобных получаем:

$$R_1^2 R_3 + R_1 R_3^2 + R_3^2 R_{ac} = 2R_1 R_3 R_{bc} + R_3^2 R_{bc} + R_1^2 R_{bc}. \quad (7)$$

Заметим, что уравнение относительно R_3 является квадратным, приведём его к виду $ax^2 + bx + c = 0$:

$$(R_1 + R_{ac} - R_{bc})R_3^2 + (R_1^2 - 2R_1 R_{bc})R_3 - R_1^2 R_{bc} = 0. \quad (8)$$

Далее будет удобно перейти к численным значениям:

$$43,33 \cdot R_3^2 - 1100 \cdot R_3 - 90000 = 0. \quad (9)$$

Решим это квадратное уравнение через дискриминант:

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{1100 + \sqrt{1100^2 + 4 \cdot 43,33 \cdot 90000}}{2 \cdot 43,33} = \frac{1100 + \sqrt{16808800}}{86,66} \approx \\ &\approx \frac{1100 + \sqrt{16800000}}{86,66} = \frac{1100 + 100 \cdot \sqrt{1680}}{86,66} \approx \frac{1100 + 4100}{86,66} \approx 60. \end{aligned} \quad (10)$$

Перед корнем стоит знак «+», т.к. отрицательное значение сопротивления не имеет физического смысла.

Полученное значение R_3 подставим в уравнение (3) и найдём R_2 :

$$R_2 = \frac{R_{ac}(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_{ac}} = \frac{29,33 \cdot 110}{80,67} \approx 40. \quad (11)$$

Ответ: $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 60$ Ом.

Рекомендуемые баллы:

Знание формулы последовательного соединения резисторов – до 3 баллов

Знание формулы параллельного соединения резисторов – до 3 баллов

На основе формул составлена система из двух уравнений – до 6 баллов

Решение системы, пояснение отброса отрицательных корней – до 8 баллов

Получение верного численного ответа – до 5 баллов

Задание 4. (25 баллов) Линия из планет

Будем считать, что Земля, Марс и Юпитер вращаются вокруг Солнца по окружностям, лежащим в одной плоскости, с постоянными скоростями. Вращение всех трех планет направлено в одну и ту же сторону. Земля делает один оборот вокруг Солнца за 365.26 суток, Марс – за 686.98 суток, а Юпитер – за 4332.59 суток. Пусть в некоторый момент все три планеты оказываются на одной и той же прямой линии вместе с Солнцем, с одной и той же стороны от него. Сколько раз Земля и Марс снова займут положение на одной прямой с Солнцем до тех пор, пока прямая Солнце – Юпитер не окажется в пределах 10° от Земли и Марса? Рассматривать только те конфигурации планет, в которых все они находятся с одной и той же стороны от Солнца.

Решение

Угловые скорости вращения планет относительно Солнца имеют следующие значения:

- Земля, $v_3 = 360^\circ/365.26 = 0.98560$ градусов/сутки;
- Марс, $v_M = 360^\circ/686.98 = 0.52403$ градусов/сутки;
- Юпитер, $v_{Ю} = 360^\circ/4332.59 = 0.083091$ градусов/сутки.

Рассмотрим угловые скорости вращения Земли и Марса относительно линии, соединяющей Солнце с Юпитером:

$$v_{3Ю} = v_3 - v_{Ю} = 0.90251 \text{ градусов/сутки};$$

$$v_{МЮ} = v_M - v_{Ю} = 0.44094 \text{ градусов/сутки}.$$

В этой системе отсчёта (назовём её системой Юпитера) Земля и Марс снова окажутся на одной радиальной прямой (с одной и той же стороны от Солнца) тогда, когда Земля обгонит Марс на 360° . Обозначим через T_1 период времени между такими встречами:

$$v_{3Ю} \cdot T_1 - v_{МЮ} \cdot T_1 = 360^\circ \Rightarrow T_1 = \frac{360^\circ}{v_{3Ю} - v_{МЮ}} = 779.95 \text{ суток}.$$

Отметим, что период «встреч» Земли и Марса от выбора вращающейся системы отсчёта не зависит – он будет одним и тем же в любой подобной системе.

Марс совершит один полный оборот в «системе Юпитера» за время

$$T_{МЮ} = \frac{360^\circ}{v_{МЮ}} = 816.43 \text{ суток}.$$

В момент $T_{МЮ}$ Марс окажется с Юпитером на одной линии, соединяющей их с Солнцем. Этот момент отстанет от момента встречи Земли и Марса T_1 на

$$\Delta T = T_{МЮ} - T_1 = 36.482 \text{ суток}.$$

За время ΔT Марс пройдёт 16.09° до того, как окажется на одной радиальной прямой с Юпитером. Соответственно, в момент встречи Земли с Марсом прямая Солнце-Юпитер находится за пределами 10° , нужных для решения задачи.

С каждой следующей встречей Земли и Марса расхождение между положениями прямых Солнце-Земля-Марс и Солнце-Юпитер-Марс будет накапливаться, увеличиваясь на 16.087° . Марс, Земля и Юпитер окажутся почти на одной линии тогда, когда указанное расхождение приблизится к 360° . Деление 360° на 16.09° даёт 22.37. В момент 22-й встречи Земли и Марса линия Солнце-Земля-Марс будет отставать от линии Солнце-Юпитер-Марс на следующий угол:

$$\alpha = 22 \cdot 16.087 = 353.9^\circ.$$

Учитывая, что значение α , равное 360° , обеспечило бы полное совпадение прямых Солнце-Земля-Марс и Солнце-Юпитер-Марс, получаем отклонение

$$\Delta\alpha = 360^\circ - 353.9^\circ = 6.1^\circ.$$

Полученная точность совпадения прямых Солнце-Земля-Марс и Солнце-Юпитер-Марс удовлетворяет условию задачи. Таким образом, Земля и Марс займут положение на одной прямой с Солнцем 22 раза до новой «встречи» с Юпитером.

Ответ: 22 раза.

Рекомендуемые баллы:

За понимание концепции угловых скоростей – **до 2 баллов**

За получение периода встреч Марса с Землёй на одной прямой с Солнцем – **до 8 баллов**

За правильное рассмотрение периодов расположения Марса либо Земли на одной прямой с Юпитером и Солнцем – **до 8 баллов**

За доведение решения до правильного ответа - **до 7 баллов**.