

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Плавление метеорита

Рассмотрим упрощенную модель плавления метеорита, летящего сквозь земную атмосферу, согласно которой его внешние слои разогреваются до температуры плавления, плавятся, а затем сдуваются потоком воздуха. Будем считать, что внутренняя область метеорита остаётся холодной (имеет температуру, равную 270 К), пока не оказывается в прямом контакте с атмосферой. Пусть разогрев некоторого метеорита происходит только за счет его кинетической энергии, которая пропорциональна исходной массе. Когда эта энергия будет израсходована, данный метеорит потеряет 90 % своей массы, если его разогрев и плавление будут соответствовать модели, описанной выше. Альтернативная модель может состоять в том, что весь метеорит сначала прогревается до температуры плавления (1800 К), а затем плавится до тех пор, пока не будет израсходована вся кинетическая энергия. Расплавленные слои уносятся потоком воздуха, аналогично первой модели. Какую часть массы потеряет тот же самый метеорит при плавлении, описываемом второй моделью? Теплоемкость метеорита принять равной 600 Дж/кг·К, удельную теплоту плавления – равной 280 кДж/кг.

Решение

Пусть v^2 – начальная скорость метеорита, связанная с кинетической энергией и массой соотношением

$$E_{\text{кин}} = mv^2 / 2.$$

Обозначим через Δm_1 массу, которую метеорит потеряет, если будет плавиться согласно первой модели. В этом случае, вся кинетическая энергия пойдёт на нагрев и плавление именно этой массы, так что

$$mv^2 / 2 = \Delta m_1 \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda),$$

где $c = 600$ Дж/кг – удельная теплоемкость метеорита, $\Delta T = 1800 - 270 = 1530$ К – изменение температуры его расплавившихся слоев. Соответственно,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\Delta m_1}{m} \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) = (90\%) \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) = 0.9 \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) = 1078200 \text{ Дж/кг}.$$

Пусть Δm_2 – масса, которую метеорит теряет в рамках второй модели плавления. Здесь, до температуры плавления разогревается вся масса метеорита, расплавлена же будет только масса Δm_2 :

$$mv^2 / 2 = m \cdot c \cdot \Delta T + \lambda \cdot \Delta m_2.$$

Теперь,

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} &= c \cdot \Delta T + \lambda \cdot \frac{\Delta m_2}{m} = 0.9 \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) \Rightarrow \\ \frac{\Delta m_2}{m} &= \frac{0.9 \cdot (c \cdot \Delta T + \lambda) - c \cdot \Delta T}{\lambda} = 0.9 - 0.1 \cdot \frac{c \cdot \Delta T}{\lambda} = 0.572 = 57.2\%. \end{aligned}$$

Ответ: при плавлении по второй модели метеорит потеряет 57.2 % массы.

Рекомендуемые баллы:

За понимание связи между кинетической энергией и массой метеорита – **до 4 баллов**

За правильное использование теплоемкости – **до 4 баллов**

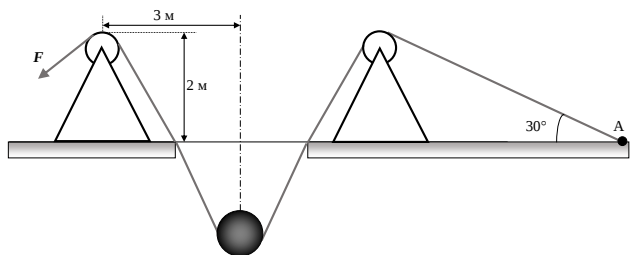
За правильное использование удельной теплоты плавления – **до 4 баллов**

За правильное применение первой модели плавления метеорита - **до 6 баллов**.

За правильное применение второй модели плавления метеорита - **до 6 баллов**.

За правильный численный ответ - **до 1 балла**.

Задание 2. (25 баллов) Метеорит под водой

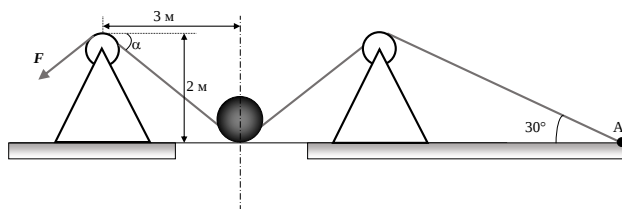


Метеорит, упавший в озеро, находится на глубине, равной 2 метрам. Для того, чтобы поднять метеорит, на льду озера строят систему опор и блоков, показанную на Рисунке. Какое давление должен выдержать лёд под опорами в процессе подъёма метеорита, если площади каждой из опор составляют 4 м^2 ? Масса метеорита равна 10 тонн, он должен быть поднят из воды полностью. Считать, что в точке

А трос хорошо закреплен, а сила F будет достаточной для реализации всего процесса подъёма. Опоры и края проруби симметричны относительно метеорита. Размерами и массой блоков можно пренебречь.

Решение

Согласно условию задачи, метеорит должен быть поднят из воды полностью. Так что, рассмотрим баланс сил в его надводном положении, как показано на Рисунке:



Линейные размеры метеорита в задаче не указаны. Будем считать их достаточно малыми для того, чтобы тангенс угла α , показанного на Рисунке, мог быть рассчитан с использованием данных там же размеров:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}.$$

Пусть сила натяжения троса, удерживающего метеорит, равна T . Тогда вертикальная сила, действующая на метеорит со стороны тросов, уравновешена силой тяжести:

$$F_T = 2 \cdot T \cdot \sin \alpha = mg,$$

где m – масса метеорита, g – ускорение свободного падения, которое принимаем равным 9.8 м/с^2 . Таким образом,

$$T = \frac{mg}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

Здесь,

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0.5547.$$

Этот же результат можно получить через тангенс, приведенный выше:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}.$$

Подстановка числовых данных даёт

$$T = \frac{mg}{2 \cdot \sin \alpha} = 88336 \text{ Н}.$$

На левую опору трос будет давить вертикально вниз с силой

$$\begin{aligned} F_{\text{опоры}} &= T \cdot \sin \alpha + T \cdot \sin(30^\circ) = T \cdot (\sin \alpha + 0.5) = \\ &= \frac{mg}{2} + \frac{mg}{4 \cdot \sin \alpha} = \frac{mg}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha} \right). \quad (*) \end{aligned}$$

Как видно из правой части формулы, сила $F_{\text{опоры}}$ увеличивается с уменьшением угла α , так что в процессе подъёма метеорита из воды она увеличивалась. К тому же, пока метеорит находился в воде, его вес был частично скомпенсирован силой Архимеда. Таким образом, максимальным значением силы, действующей на опору в процессе подъёма метеорита из воды, будет именно то, что даётся формулой (*).

Будем считать, что симметрия опор, отмеченная в задаче, относится не только к их расположению, но и к силе $F_{\text{опоры}}$. Также, пренебрежем массами опор, поскольку они неизвестны. Подстановка чисел в формулу (*) даёт

$$F_{\text{опоры}} = 93168 \text{ Н.}$$

Давление опоры на лёд равно отношению силы $F_{\text{опоры}}$ к площади, равной 4 м^2 . Именно это давление P лёд и должен выдержать:

$$P = F_{\text{опоры}} / 4 = 23292 \text{ Па} \approx 23000 \text{ Па.}$$

Давление округлено с точностью до двух значащих цифр, поскольку точность исходных данных – одна значащая цифра.

Рекомендуемые баллы:

За правильное рассмотрение силы натяжения троса – до 4 баллов

За правильные проекции сил на вертикальную ось – до 10 баллов

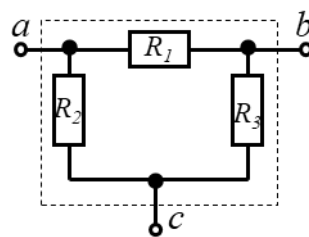
За получение вертикальной силы, действующей на опору – до 6 баллов

За правильный расчет давления опоры на лёд - до 4 баллов.

Ответ: Лёд должен выдержать 23 кПа.

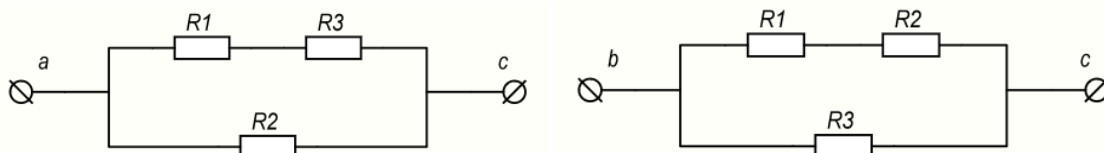
Задание 3. (25 баллов) П-образный аттенюатор

Мастер, ремонтируя радиоприемник, обнаружил вышедшие из строя несколько одинаковых П-образных аттенюаторов. К сожалению, замену аттенюаторам найти не удалось, а к счастью, один из аттенюаторов остался полностью работоспособным. Исследуя его устройство, мастер смог восстановить принципиальную электрическую схему, представленную на рисунке, и обнаружил что номинал резистора R_1 по маркировке составил 40 Ом, а маркировка на двух резисторах R_2 и R_3 в результате термического воздействия не читается. Для изготовления вышедших из строя аттенюаторов определите значения сопротивлений резисторов R_2 и R_3 , если измеренное электрическое сопротивление между точками a и c составило 29.33 Ом, между точками b и c составило 36 Ом.



Решение

Для более простого восприятия схему можно перерисовать в зависимости от места подключения измерительного прибора.



Для обоих случаев наблюдаем параллельное соединение одиночного резистора с двумя последовательно соединёнными. Рассмотрим случай подключения между точками a и c . Резисторы R_1 и R_3 соединены последовательно, общее сопротивление верхней ветви будет $R_{13} = R_1 + R_3$. К ним параллельно подключён резистор R_2 . Сопротивление между точками a и c можно записать как:

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_2} \text{ или } \frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2}. \quad (1)$$

Аналогично получаем выражение для R_{bc} :

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} \text{ или } \frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (2)$$

В итоге получили систему из двух уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными R_2 и R_3 . Из первого уравнения выразим R_2 :

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_{ac}} - \frac{1}{R_1 + R_3}} = \frac{R_{ac}(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_{ac}}. \quad (3)$$

Перед подстановкой выполним преобразование уравнения (2), приведём его в «одноэтажному» виду умножением на $(R_1 + R_2)R_3R_{bc}$:

$$(R_1 + R_2)R_3 = R_3R_{bc} + (R_1 + R_2)R_{bc}. \quad (4)$$

Теперь подставим (3) в (4):

$$\left(R_1 + \frac{R_{ac}(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_{ac}} \right) R_3 = R_3R_{bc} + \left(R_1 + \frac{R_{ac}(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_{ac}} \right) R_{bc}. \quad (5)$$

Умножим обе части уравнения на $R_1 + R_3 - R_{ac}$ и раскроем все скобки:

$$\begin{aligned} R_1^2 R_3 + R_1 R_3^2 - \underline{R_1 R_3 R_{ac}} + \underline{R_1 R_3 R_{ac}} + R_3^2 R_{ac} = \\ = R_1 R_3 R_{bc} + R_3^2 R_{bc} - \underline{R_3 R_{ac} R_{bc}} + R_1^2 R_{bc} + R_1 R_3 R_{bc} - \underline{R_1 R_{ac} R_{bc}} + \underline{R_1 R_{ac} R_{bc}} + \underline{R_3 R_{ac} R_{bc}} \end{aligned} \quad (6)$$

После приведения подобных получаем:

$$R_1^2 R_3 + R_1 R_3^2 + R_3^2 R_{ac} = 2R_1 R_3 R_{bc} + R_3^2 R_{bc} + R_1^2 R_{bc}. \quad (7)$$

Заметим, что уравнение относительно R_3 является квадратным, приведём его к виду $ax^2+bx+c=0$:

$$(R_1 + R_{ac} - R_{bc})R_3^2 + (R_1^2 - 2R_1 R_{bc})R_3 - R_1^2 R_{bc} = 0. \quad (8)$$

Далее будет удобно перейти к численным значениям:

$$33,33 \cdot R_3^2 - 1280 \cdot R_3 - 57600 = 0. \quad (9)$$

Решим это квадратное уравнение через дискриминант:

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{1280 + \sqrt{1280^2 + 4 \cdot 33,33 \cdot 57600}}{2 \cdot 33,33} = \frac{1280 + \sqrt{9317632}}{66,66} \approx \\ &\approx \frac{1280 + \sqrt{9320000}}{66,66} \approx \frac{1280 + 100 \cdot 30,5}{66,66} = \frac{4330}{66,66} \approx 65. \end{aligned} \quad (10)$$

Перед корнем стоит знак «+», т.к. отрицательное значение сопротивления не имеет физического смысла. Полученное значение R_3 подставим в уравнение (3) и найдём R_2 :

$$R_2 = \frac{R_{ac}(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R_{ac}} = \frac{29,33 \cdot 105}{75,67} \approx 40,7. \quad (11)$$

Ответ: $R_2 = 40,7$ Ом, $R_3 = 65$ Ом.

Рекомендуемые баллы:

Знание формулы последовательного соединения резисторов – до 3 баллов

Знание формулы параллельного соединения резисторов – до 3 баллов

На основе формул составлена система из двух уравнений – до 6 баллов

Решение системы, пояснение отброса отрицательных корней – до 8 баллов

Получение верного численного ответа – до 5 баллов

Задание 4. (25 баллов) Сближение звезд

На некоторой планете с интервалом в 50 тысяч лет происходят масштабные извержения вулканов, выбрасывающие в космос огромные количества вещества, имеющего уникальный состав. Пусть это вещество движется от планеты со скоростью 20 км/с. В другой звездной системе геологи обнаружили три слоя пыли с первой планеты. Интервал между первым и вторым слоями составил 31 тысячу лет, тогда как между вторым и третьим слоями – 27 тысяч лет. С каким постоянным ускорением приближается к первой планете звездная система геологов? Ответ дать в км/с за тысячу лет, с точностью до двух значащих цифр.

Решение

Будем считать Планету 1 практически неподвижной относительно центра системы концентрических колец, образованных пылью. Это предположение вытекает из условия задачи, поскольку скорость удаления этих колец от планеты задана константой: $v_{\text{пыли}} = 20$ км/с. В таком случае, расстояние между пылевыми кольцами, движущимися с Планеты 1, будет постоянной величиной $d = 50 \cdot 20 = 1000$ км/с·тыс. лет.

Пусть $v_{12}(t)$ – скорость сближения Планет 1 и 2, зависящая от времени t . Эта скорость направлена вдоль прямой, соединяющей планеты. С учетом неподвижности Планеты 1, можно рассмотреть скорость сближения Планеты 2 с пылевыми кольцами

$$v(t) = v_{12}(t) + v_{\text{пыли}}.$$

На Планете 2 обнаружено 3 слоя пыли с Планеты 1. Интервалы времени между появлением этих слоев равны временам прохождения Планетой 2 расстояния d между пылевыми кольцами. Пусть t_1 , t_2 и t_3 – моменты встречи Планеты 2 с каждым из колец. Значения интервалов времени:

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = 31 \text{ тыс. лет};$$

$$\Delta t_{23} = t_3 - t_2 = 27 \text{ тыс. лет}.$$

Указанные интервалы времени могут быть рассчитаны с использованием средних скоростей:

$$\langle v \rangle_{12} = \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2}; \quad \langle v \rangle_{23} = \frac{v(t_2) + v(t_3)}{2};$$

$$\Delta t_{12} = \frac{d}{\langle v \rangle_{12}}; \quad \Delta t_{23} = \frac{d}{\langle v \rangle_{23}}.$$

Можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} v(t_1) + v(t_2) = 2d / \Delta t_{12}, \\ v(t_2) + v(t_3) = 2d / \Delta t_{23}. \end{cases}$$

Если скорость $v(t)$ увеличивается с постоянным ускорением a , то

$$v(t_2) = v(t_1) + a \cdot \Delta t_{12}, \quad v(t_3) = v(t_1) + a \cdot (\Delta t_{12} + \Delta t_{23}),$$

так что система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} 2 \cdot v(t_1) + a \cdot \Delta t_{12} = 2d / \Delta t_{12}, \\ 2 \cdot v(t_1) + a \cdot (2\Delta t_{12} + \Delta t_{23}) = 2d / \Delta t_{23}. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$a \cdot (\Delta t_{12} + \Delta t_{23}) = 2d \left(\frac{1}{\Delta t_{23}} - \frac{1}{\Delta t_{12}} \right) = 2d \frac{\Delta t_{12} - \Delta t_{23}}{\Delta t_{12} \cdot \Delta t_{23}} \Rightarrow$$

$$a = \frac{2d \cdot (\Delta t_{12} - \Delta t_{23})}{\Delta t_{12} \cdot \Delta t_{23} \cdot (\Delta t_{12} + \Delta t_{23})} = \frac{2 \cdot 1000 \text{ км/с} \cdot \text{тыс. лет} \cdot 4 \text{ тыс. лет}}{31 \cdot 27 \text{ тыс. лет}^2 \cdot 58 \text{ тыс. лет}} = 0.1648 \text{ км/с за тысячу лет}.$$

Отметим, что результат приведён с 4-мя значащими цифрами для упрощения его сравнения с расчетами участников олимпиады. Ответ, согласно условию задачи, следует округлить до 2 значащих цифр.

Ответ: 0.16 км/с за тысячу лет.

Рекомендуемые баллы:

За правильное рассмотрение расстояния между пылевыми кольцами – **до 2 баллов**

За правильное рассмотрение скорости сближения Планеты 2 с пылевыми кольцами – **до 6 баллов**

За хорошую попытку установления связи между ускоренным сближением планет и переменностью интервалов времени между слоями пыли – **до 10 баллов**

За получение обоснованного правильного ответа - **до 7 баллов**.