

Задача 1. Встречное движение (25 баллов)

Упругий шар, радиус которого равен 10 см, одномерно движется между двумя стенками. Расстояние от одной стенки до другой составляет 1 метр. Столкновения шара со стенками происходят каждые две секунды. В систему добавляют второй такой же шар, движущийся навстречу первому с той же скоростью. При этом, второй шар начинает движение от стенки тогда, когда первый проходит половину дистанции между стенками. В какие моменты времени, от начала движения второго шара, будут происходить соударения шаров со стенками? Взаимодействия шаров со стенками и между собой считать мгновенными, абсолютно упругими.

Решение

Единственный шар, движущийся между стенками, перемещается от одной стенки до другой за время $\Delta t_1 = 2$ секунды. При этом, центр шара проходит расстояние

$$d_1 = L - 2 \cdot R = 100 - 2 \cdot 10 = 80 \text{ см},$$

где $L = 100$ см – расстояние между стенками, $R = 10$ см – радиус шара. Соответственно, скорость шара:

$$v = d_1 / \Delta t_1 = 80 / 2 = 40 \text{ см/с}.$$

После появления второго шара, шары будут сталкиваться. При упругом столкновении шаров действуют законы сохранения энергии, а также импульса. В данной системе суммарный импульс перед столкновением шаров равен нулю, поскольку одинаковые шары движутся навстречу с равными скоростями. После столкновения импульс сохранит нулевое значение, так что направления скоростей изменятся на противоположные, а модули останутся равными. При этом, модули скоростей после столкновения будут равны исходным скоростям, поскольку иначе изменилась бы кинетическая энергия системы.

Таким образом, при каждом столкновении шары будут сохранять свои скорости, изменяя направление движения.

Для дальнейшего решения задачи можно принять, что при столкновениях шары меняются местами, сохраняя скорость движения от стенки к стенке. Этот подход позволяет заменить реальные шары «виртуальными», движущимися независимо друг от друга, без столкновений. Нумерация шаров ниже соответствует указанной модели – виртуальным шарам.

Для расчета длины пути виртуального шара нужно вычесть из расстояния между стенками L диаметры обоих шаров:

$$d_2 = L - 2 \cdot (2 \cdot R) = 100 - 4 \cdot 10 = 60 \text{ см}.$$

Интервал времени между столкновениями каждого из шаров со стенками составят

$$\Delta t_2 = d_2 / v = (60 \text{ см}) / (40 \text{ см/с}) = 1.5 \text{ с}.$$

Второй шар будет сталкиваться со стенками в моменты времени

$$t_{2n} = n \cdot \Delta t_2 = (1.5 \cdot n) \text{ с}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Первому шару для первого столкновения со стенкой необходимо будет пройти путь, равный половине расстояния между стенками, за вычетом своего радиуса, а также диаметра второго шара. Соответствующее время до столкновения со стенкой:

$$t_{10} = \frac{L/2 - R - 2 \cdot R}{v} = \frac{50 - 30}{40} = \frac{1}{2} \text{ с.}$$

Таким образом, первый шар будет сталкиваться со стенками в моменты времени

$$t_{1n} = t_{10} + n \cdot \Delta t_2 = (0.5 + 1.5 \cdot n) \text{ с, } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

В целом, виртуальные шары будут сталкиваться со стенками в моменты времени t_{1n} и t_{2n} , то есть 0.5 с, 1.5 с, 2 с, 3 с, 3.5 с, 4.5 с, 5 с и так далее. Реальные шары будут встречаться со стенками в эти же моменты времени.

Ответ: Моменты столкновений шаров со стенками: 0.5 с; $(1.5 \cdot n)$ с; $(0.5 + 1.5 \cdot n)$ с, где $n = 1, 2, 3, \dots$

Критерии оценивания

1. Правильно определена скорость шара: **до 4 баллов**;
2. Правильно описаны столкновения шаров: **до 10 баллов**;
3. Длины пути шаров между стенками правильно определены с учетом радиусов обоих шаров: **до 6 баллов**;
4. Правильно получен и сформулирован ответ задачи: **до 5 баллов**.

Задача 2. Смещение звёзд (25 баллов)

Космический путешественник вынужден остановиться на незнакомой планете для ремонта звездолета. Ремонт потребовал целого года, то есть всего периода обращения этой планеты вокруг своей звезды. Путешественник замечает, что за время ремонта все звезды ночного неба смещались не менее чем на 30 угловых секунд относительно положений, вычисленных корабельным компьютером по трехмерным координатам этих звезд в космическом пространстве. Какова продолжительность года на планете, если радиус её орбиты совпадает с радиусом орбиты Земли ($1.50 \cdot 10^8$ км)?

Решение

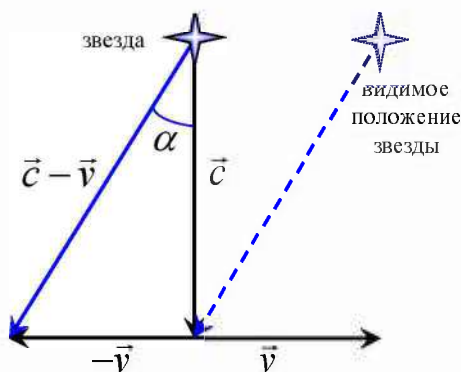


Рисунок 1

Эффект, рассмотренный в задаче, обусловлен aberrацией света. Угол, под которым звезда видна на небесной сфере, определяется сложением векторов скорости света, идущего от звезды к Земле (вектор $\vec{c}$ на Рисунке 1), и вектора орбитальной скорости планеты $\vec{v}$, взятого со знаком «минус». Сложение указанных векторов и знак «минус» возникают при переходе от системы отсчета, связанной с космосом (который упрощенно считаем неподвижным) к системе отсчета планеты, движущейся вокруг своей звезды.

Отметим, что для строгого решения задачи переходить в систему отсчета движущейся планеты нужно с использованием специальной теории относительности. При этом получается, что

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \frac{v}{c}.$$

С другой стороны, орбитальная скорость планеты мала по сравнению со скоростью света, в связи с чем решение без специальной теории относительности вполне возможно. Именно такого решения можно ожидать на школьном уровне, его достаточно для максимального оценивания работы. Указанное приближение и показано на Рисунке 1:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{v}{c}.$$

Видимое положение звезды будет изменяться в течение года, в зависимости от взаимной ориентации векторов $\vec{c}$ и $\vec{v}$. Формулировка задачи позволяет выбрать для решения произвольную звезду. Наиболее простым представляется выбор любой из звезд, расположенных в той же плоскости, что и орбита планеты. Такая звезда в течение года будет смещаться по прямой вдоль эклиптики – проекции орбиты планеты на небесную сферу. Среднее положение будет соответствовать отсутствию aberrации ($\alpha = 0$), тогда как крайние положения – тем моментам времени, когда векторы $\vec{v}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны (Рисунок 2). В эти моменты угловое смещение звезды относительно среднего положения достигнет максимального значения

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v}{c}\right) \approx \frac{v}{c} = 30'' = 1.45 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

$$\left(\text{секунды в радианы } 1.45 \cdot 10^{-4} = \frac{30'' \cdot \pi}{3600 \cdot 180^\circ} \right)$$

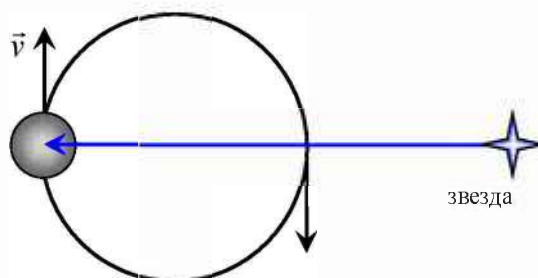


Рисунок2

Таким образом, орбитальная скорость планеты:

$$v = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot c \approx \alpha \cdot c = 1.45 \cdot 10^{-4} \cdot 3.00 \cdot 10^5 = 43.5 \text{ км/с}$$

(расчет с большим количеством значащих цифр даёт 43.6 км/с)

Период обращения планеты вокруг звезды получается делением длины орбиты на орбитальную скорость v :

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^8}{43.6} = 2.16 \cdot 10^7 \text{ с} = 0.685 \text{ года}$$

$$\left(0.685 \text{ года} = \frac{2.16 \cdot 10^7 \text{ с}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \right)$$

С учетом вычислительных погрешностей, допустима ошибка в 3-й значащей цифре. Отметим, что использование более точной длины года, равной 365.25 суток, не изменяет первых трех значащих цифр ответа.

Ответ: продолжительность года на планете равна $2.16 \cdot 10^7$ секунд, либо 0.685 года.

Критерии оценивания

1. Показано правильное понимание явления, рассматриваемого в задаче: **до 12 баллов**;
2. Правильно получена орбитальная скорость планеты, с учетом углового смещения звезд: **до 6 баллов**;
3. Получена правильная формула для расчета периода обращения планеты: **до 4 баллов**;
4. Получен правильный ответ: **до 3 баллов**.

Задача 3. Модель паруса (25 баллов)

На Рисунке изображена схематическая проекция лодки с треугольным парусом на плоскость воды. Как нужно развернуть парус для того, чтобы вектор скорости лодки стал противоположным? В качестве упрощения полагать, что сила, с которой ветер действует на парус, всегда направлена перпендикулярно его поверхности, причём её модуль после поворота паруса не изменится. Силу сопротивления воды считать перпендикулярной оси корпуса лодки, которая показана на Рисунке. Лодка движется вдоль оси корпуса. Направление ветра остается неизменным. Ответ проиллюстрировать рисунком.



Рисунок к Задаче 3

Решение

На Рисунке вектора $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ - это силы, действующие на парус до и после изменения его положения; $\vec{N}$ - сила сопротивления воды, перпендикулярная направлению движения. Ось x направлена вдоль движения лодки, ось y перпендикулярна оси x . Вдоль оси y лодка не движется, так что сила $\vec{N}$ должна быть противоположна проекциям сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$.

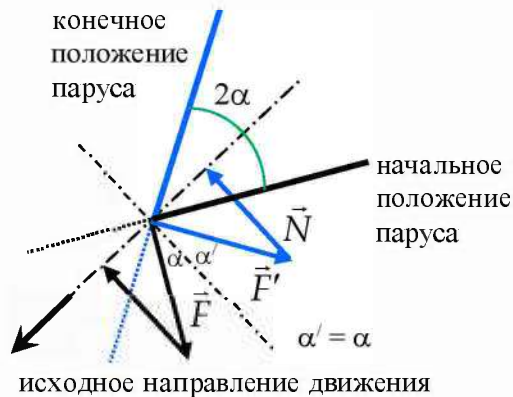


Рисунок к решению Задачи 3

Модули сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ равны согласно условию задачи. Равенство углов α и α' на Рисунке приводит к тому, что проекции сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ на ось x равны и противоположны.

В условии задачи нет прямого указания на связь между скоростью лодки и силой, действующей со стороны паруса вдоль оси x . Можно принять, что сила сопротивления воздуха, действующая на лодку, не зависит от направления её движения. Эта сила пропорциональна квадрату скорости лодки. После поворота паруса постоянная скорость лодки установится при равенстве силы сопротивления воздуха и проекции $\vec{F}'$ на ось x . Установившаяся скорость лодки будет функцией модуля силы $\vec{F}'$, причём такой же, какой была зависимость скорости до поворота паруса от силы $\vec{F}$. Можно считать, что равенство модулей проекции сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ на ось x приведёт к равенству модулей скорости лодки в противоположных направлениях движения.

Таким образом, для изменения вектора скорости лодки на противоположный нужно развернуть парус на угол 2α , как показано на Рисунке к решению задачи.

Ответ: парус нужно развернуть на угол 2α , показанный на Рисунке к решению задачи.

Критерии оценивания

1. Предложено правильное направление поворота паруса: **до 4 баллов**;
2. В решении присутствует рисунок, на котором правильно изображены вектора либо проекции сил, действующих на лодку при первоначальной ориентации паруса (**до 6 баллов**) и после его поворота (**дополнительно до 6 баллов**);
3. Показано, что после поворота паруса сумма векторов сил, действующих на лодку со стороны паруса и воды, будет противоположна исходной сумме: **до 2 баллов**;

4. Присутствует разумное обсуждение связи между силами, действующими на лодку, и её скоростью; в том числе, рассмотрена сила сопротивления воздуха: **до 7 баллов**.

Задача 4. Обмен зарядами (25 баллов)

Две частицы одинаковой массы m имеют противоположные электрические заряды q и $-q$. Они сталкиваются друг с другом, двигаясь вдоль одной прямой под воздействием кулоновской силы, с нулевыми начальными скоростями. При столкновении частицы обмениваются зарядами так, что значение q уменьшается в 2 раза. Какими будут после столкновения импульсы частиц на расстоянии R , совпадающем с исходным расстоянием, при котором началось движение? Считать, что частицы сталкиваются как упругие сферы радиуса r .

Решение

Силы, действующие на каждую из частиц со стороны другой частицы, равны по модулю и противоположны по направлению (согласно третьему закону Ньютона). Массы частиц одинаковы. Соответственно, в любой момент времени равны по модулю и противоположны по направлению как ускорения, так и скорости частиц. Центр инерции системы неподвижен.

В процессе движения частиц до столкновения выполняется закон сохранения механической энергии. Соответственно, в момент столкновения кинетическая энергия T равна изменению потенциальной энергии ΔU , взятому с противоположным знаком. Потенциальная энергия определяется законом Кулона

$$U = -K_E \frac{q^2}{d},$$

где $K_E = 1/(4\pi\epsilon_0)$ – константа закона Кулона, d – расстояние между центрами частиц. В начале движения $d = R$, в момент столкновения $d = 2r$. Соответственно, кинетическая энергия в момент столкновения:

$$T = -\Delta U(q) = K_E q^2 \cdot \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right).$$

Если частицы сталкиваются как упругие сферы, то кинетическая энергия сразу после столкновения равна кинетической энергии до столкновения. К моменту возвращения частиц на расстояние R кинетическая уменьшается на величину, равную увеличению потенциальной энергии, с учетом изменившихся зарядов:

$$\Delta T = - \left(U \left(\frac{q}{2}, \frac{1}{R} \right) - U \left(\frac{q}{2}, \frac{1}{2r} \right) \right) = -K_E \frac{q^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right).$$

Соответственно, в системе останется кинетическая энергия

$$\begin{aligned} T(R) &= T(2r) + \Delta T = K_E q^2 \cdot \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right) - K_E \frac{q^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right) = \\ &= K_E \frac{3q^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

Кинетическая энергия связана со скоростью частиц v , а также импульсом p соотношением

$$T(R) = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{m}.$$

Модули импульсов обеих частиц одинаковы, равны p . Теперь,

$$p^2 = T(R) \cdot m = \frac{3 m K_E^2}{4} \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right) \Rightarrow$$

$$p = \frac{q}{2} \cdot \sqrt{3 m K_E} \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right)^{1/2}.$$

Ответ: Импульсы частиц будут иметь значения $p(R) = \frac{q}{2} \cdot \sqrt{3 m K_E} \cdot \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right)^{1/2}$.

Критерии оценивания

1. Правильно записана потенциальная энергия взаимодействия частиц: **до 4 баллов**;
2. Правильно определена кинетическая системы в момент столкновения: **до 4 баллов**;
3. Правильно учтено изменение потенциальной энергии взаимодействия частиц после понижения зарядов: **до 6 баллов**;
4. Правильно определена кинетическая энергия системы при удалении частиц на расстояние R после столкновения: **до 6 баллов**;
5. Правильно определен соответствующий импульс частиц: **до 5 баллов**.