

Задача 1. Поток частиц (25 баллов)

Экспериментатор исследует необычный поток заряженных частиц, найденный в глубоком космосе. Векторы скорости всех частиц в потоке направлены одинаково, однако различаются по модулю. Детектором частиц выступает плоский конденсатор, напряженность поля в объеме которого постоянна. Этот конденсатор неподвижно зафиксирован на оси потока частиц так, что векторы скорости частиц параллельны вектору напряженности поля. Ведется подсчет частиц, пересекающих «входную» обкладку конденсатора за единицу времени. На Рисунке показана зависимость доли этих частиц, прошедших внутри конденсатора до остановки расстояние d , от этого расстояния, в логарифмических координатах. Какова зависимость концентрации частиц в потоке от их скорости, в исследованном диапазоне энергий?

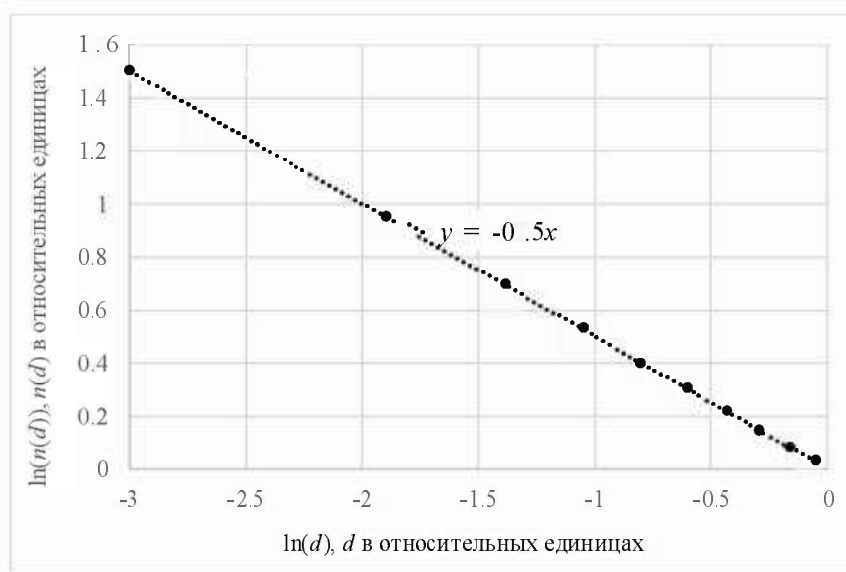


Рисунок к Задаче 1

Решение

Анализ графика, предложенного в задаче, показывает, что положения точек удовлетворяют зависимости

$$n(d) = d^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Отметим, что точки графика расположены дискретно, они имеют координаты $d_i = 0.5 \cdot i$. Расстояние между точками: $\Delta d = \text{const} = 0.1$ (относительных единиц). В дискретной форме

$$n(d_i) = \frac{1}{\sqrt{d_i}}.$$

Обозначим напряженность поля внутри конденсатора через E , а кинетическую энергию частиц – через T_i . В пути до остановки частицы теряют всю кинетическую энергию, так что

$$T_i(d_i) = q \cdot E \cdot d_i.$$

Заряды всех частиц q полагаем одинаковыми, поскольку иных указаний в задаче нет. Теперь,

$$n(T_i) = \sqrt{\frac{qE}{T_i}},$$

Полученные значения $n(T_i)$ пропорциональны количествам частиц с энергиями T_i , входивших в приёмник за единицу времени. Эти значения нужно связать с концентрациями частиц в самом потоке. Если площадь конденсатора равна S , то за единицу времени Δt через эту площадь пройдут частицы, попадающие в объём

$$V_i = S \cdot \Delta x_i = S \cdot v_i \cdot \Delta t,$$

где v_i – это скорости частиц (см. рисунок к решению задачи).

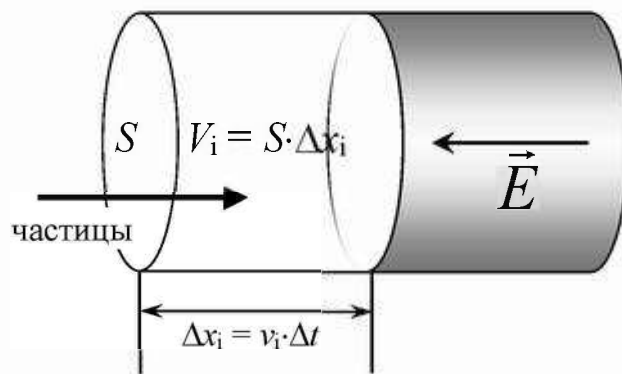


Рисунок к решению задачи 1

Пусть $n(v_i)$ – числовые концентрации частиц в потоке, соответствующие дискретным скоростям v_i . Значения $n(T_i)$, рассмотренные выше (они характеризуют входное сечение детектора, а не поток), связаны с концентрациями $n(v_i)$ соотношением

$$n(T_i) = n(v_i) \cdot V_i = n(v_i) \cdot v_i \cdot S \Delta t.$$

С другой стороны,

$$n(T_i) = \sqrt{\frac{qE}{T_i}} = \sqrt{\frac{qE}{mv_i^2/2}} = \frac{1}{v_i} \cdot \sqrt{\frac{2qE}{m}} \propto \frac{1}{v_i}.$$

Здесь m – масса частицы. Выражая $n(v_i)$ с использованием последних формул, получаем

$$\begin{aligned} n(T_i) &= \frac{1}{v_i} \cdot \sqrt{\frac{2qE}{m}} = n(v_i) \cdot v_i \cdot S \Delta t \Rightarrow \\ n(v_i) &= \sqrt{\frac{2qE}{m}} \cdot \frac{1}{S \Delta t} \cdot \frac{1}{v_i^2} \propto \frac{1}{v_i^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициент $\sqrt{\frac{2qE}{m}} \cdot \frac{1}{S\Delta t}$ в полученной формуле присутствует лишь для наглядности решения. Его размерность не соответствует физическому смыслу задачи, поскольку расстояния d внутри конденсатора, как и значения $n(d)$, были заданы в неизвестных относительных единицах. Таким образом, **ответ задачи в случае дискретного рассмотрения скоростей:**

$$n(v_i) \propto \frac{1}{v_i^2}. \quad (*)$$

При решении задачи участники могут рассмотреть непрерывную зависимость плотности частиц от скорости $n^*(v)$. Ответ в этом случае не совпадает с формулой (*), поскольку при постоянных интервалах $\Delta d = \text{const}$ различным значениям v_i соответствуют различные интервалы Δv_i :

$$\begin{aligned} n(v_i) &= n^*(v_i) \Delta v_i = n^*(v_i) \frac{\Delta T_i}{mv_i} = n^*(v_i) \frac{E \cdot \Delta d_i}{mv_i} \Rightarrow \\ n^*(v_i) &= n(v_i) \cdot v_i \cdot \frac{m}{E \cdot \Delta d_i} \propto n(v_i) \cdot v_i \propto \frac{1}{v_i}. \end{aligned}$$

Выше использована связь между малыми приращениями кинетической энергии и скорости

$$T = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow T = mv \cdot \Delta v.$$

Ответ: $n(v_i) \propto \frac{1}{v_i^2}, n^*(v) \propto \frac{1}{v}.$

Примечание: в Ответе для записи формулы $n^*(v) \sim 1/v$ индекс «i» не использован, так как зависимость концентрации от скорости здесь непрерывна.

Критерии оценивания

1. Правильно интерпретированы исходные данные задачи: **до 6 баллов;**
2. Получена правильная связь между кинетической энергией частиц и расстоянием d , которое частицы проходят в электрическом поле: **до 3 баллов;**
3. Получено правильное распределение частиц на входе в детектор (дискретное либо непрерывное): **до 8 баллов;**
4. Указано, что распределения частиц по скоростям и на входе в детектор должны быть различными: **до 4 баллов;**
5. Получена правильная зависимость концентрации частиц в потоке от скорости (дискретная либо непрерывная) **до 4 баллов.**

Задача 2. Видеосъёмка ракеты (25 баллов)

Космическая ракета стартует вертикально вверх со скоростью 12 км/с. Автоматическая камера снимает видео полета ракеты, находясь на расстоянии 400 метров от точки старта.

Объектив камеры можно представить тонкой фокусирующей линзой с фокусным расстоянием $F = 800$ мм. С каким ускорением должна перемещаться матрица камеры относительно плоскости этой линзы для того, чтобы ракета, сразу после старта, оставалась точно сфокусированной на матрице? Считать известным, что малое приращение функции $y = 1/x$ можно считать по формуле $\Delta y = -1/x^2 \cdot \Delta x$, где Δx – малое приращение аргумента x .

Решение

Условием задачи разрешено использование формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

где F – фокусное расстояние линзы, d – расстояние до объекта, f – расстояние до изображения (от центра линзы). Будем считать, что изображение формируется на матрице камеры. Тогда, расстояние от центра линзы до матрицы

$$f = \frac{Fd}{d - F} \approx F.$$

Примерное равенство $f \approx F$ возникает из-за того, что $d \gg F$ (школьники могут получить указанное примерное равенство, подставив значения из условия задачи).

Для поиска ускорения матрицы, необходимо записать малое приращение Δf . С учетом того, что F – константа, получается

$$\Delta \left(\frac{1}{f} \right) = -\Delta \left(\frac{1}{d} \right) \Rightarrow \frac{\Delta f}{f^2} = -\frac{\Delta d}{d^2} \Rightarrow \Delta f = -\frac{f^2}{d^2} \Delta d.$$

Выше использована формула $\Delta y = -1/x^2 \cdot \Delta x$ из условия задачи. Малые приращения сразу можно превратить в скорости, делением на малый интервал времени:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = -\frac{f^2}{d^2} \frac{\Delta d}{\Delta t}.$$

Далее, можно принять, что в момент старта $d = \text{const}$, поскольку скорость ракеты направлена перпендикулярно вектору расстояния до неё. Тогда ускорение матрицы оказывается пропорциональным центростремительному ускорению ракеты $a_{цб}$:

$$a_f \equiv \left(\frac{\Delta f}{\Delta t} \right)_t = -\frac{f^2}{d^2} \left(\frac{\Delta d}{\Delta t} \right)_t = -\frac{f^2}{d^2} a_{цб}.$$

Центростремительное ускорение ракеты – то же самое, что при движении по окружности. С той разницей, что расстояние от камеры до ракеты действительно увеличивается, поскольку центростремительной силы нет. Таким образом,

$$a_{цб} = \frac{v^2}{d},$$

где v – вертикальная скорость ракеты.

Окончательно,

$$a_f = -\frac{f^2}{d^2} a_{\text{мб}} = -\frac{f^2}{d^3} \cdot v^2 = -(0.8 \text{ м})^2 \frac{(12\,000 \text{ м/с})^2}{(400 \text{ м})^3} = -1.4 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_f = -1.4 \text{ м/с}^2$.

Критерии оценивания

1. Записана формула тонкой линзы: **2 балла**;
2. Получено равенство $f \approx F$: **3 балла**;
3. Получена правильная связь между скоростями ракеты и матрицы: **до 8 баллов**;
4. Получена правильная связь между ускорениями ракеты и матрицы: **до 6 баллов**;
4. Рассчитано центробежное ускорение ракеты: **до 3 баллов**;
5. Получен правильный ответ: **до 3 баллов**.

Задача 3. Электрический потенциал конусов (25 баллов)

В объёме конуса высоты H равномерно распределен электрический заряд. К вершине этого конуса подносят второй конус той же формы, высота которого равна $H/2$. Второй конус сначала электронейтрален, однако затем заряд, имевшийся в объёме первого конуса, перераспределяется таким образом, что объёмные плотности заряда в каждом из конусов становятся одинаковыми. Равномерность распределения заряда сохраняется. Как изменится электрический потенциал в точке соприкосновения конусов после перераспределения заряда?

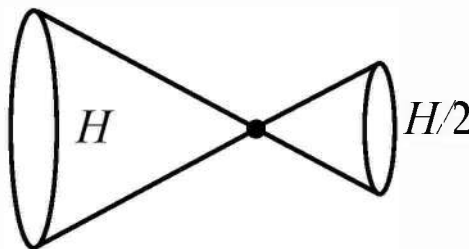


Рисунок к Задаче 3

Решение

Согласно закону Кулона, потенциал точечного заряда q на расстоянии R можно рассчитывать по формуле

$$\varphi = K_E \frac{q}{R},$$

где $K_E = 1/(4\pi\epsilon_0)$ — константа закона Кулона. Для сопоставления этой формулы с потенциалом конуса, используем метод размерностей. Потенциал любого заряженного объекта должен иметь такую же размерность, как и потенциал точечного заряда. В частности, потенциал электрического поля у вершины конуса можно записать в форме

$$\varphi = \text{const}_1 \cdot K_E \frac{q}{H},$$

где q – полный заряд конуса, H – характерный размер (в частности – высота), const_1 – безразмерная константа. Значение константы зависит от формы конуса, а также от выбора точки на его поверхности. Если же конусы подобны по форме, и выбор точки одинаков (вершина), то константа const_1 будет иметь одно и то же значение.

В свою очередь, заряд конуса пропорционален произведению плотности заряда на объём. Пусть ρ_0 – исходная плотность заряда в конусе высоты H . Тогда, суммарный заряд системы:

$$q = \rho_0 \cdot V_1 = \rho_0 \cdot \text{const}_2 \cdot H^3,$$

поскольку объём пропорционален кубу характерного размера. Теперь, первоначальный потенциал у вершины конуса высоты H (до обмена зарядами со вторым конусом):

$$\varphi_0 = \text{const}_1 \cdot K_E \frac{\text{const}_2 \cdot \rho_0 \cdot H^3}{H} = \text{const}_1 \cdot \text{const}_2 \cdot K_E \cdot \rho_0 \cdot H^2.$$

Далее, сумма объёмов двух конусов даёт формулой

$$V_1 + V_2 = \text{const}_2 \cdot \left(H^3 + \left(\frac{H}{2} \right)^3 \right) = \text{const}_2 \cdot \frac{9}{8} H^3 = \frac{9}{8} \cdot V_1.$$

После соединения конусов и перераспределения зарядов плотность заряда принимает новое значение ρ . Значение q при этом сохраняется. Таким образом:

$$q = \rho_0 \cdot V_1 = \rho \cdot (V_1 + V_2) = \rho \cdot \text{const}_2 \cdot \left(H^3 + \left(\frac{H}{2} \right)^3 \right) = \rho \cdot \frac{9}{8} \cdot V_1 \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{8}{9} \rho_0.$$

Наконец, сумма потенциалов двух конусов в точке соприкосновения вершин:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \text{const}_1 \cdot \text{const}_2 \cdot K_E \cdot \rho \left(H^2 + \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right) =$$

$$= \text{const}_1 \cdot \text{const}_2 \cdot K_E \cdot \frac{8}{9} \rho_0 \cdot \frac{5}{4} H^2 = \frac{10}{9} \varphi_0.$$

Ответ: $\varphi = 10/9 \cdot \varphi_0$.

Критерии оценивания

1. Показано, что электрический потенциал в вершине конуса можно считать по формуле, подобной закону Кулона: **до 8 баллов;**
2. Получена верная связь между потенциалом в вершине конуса, плотностью заряда и высотой: **до 12 баллов, суммарно с пунктом 1;**
3. Получено правильное распределение зарядов после соединения конусов: **до 4 баллов;**
4. Найдена сумма потенциалов двух конусов в точке соприкосновения вершин: **до 5 баллов;**

5. Записан правильный ответ, связывающий электрические потенциалы до и после соединения конусов: до 4 баллов.

Задача 4. Отдаление Луны (25 баллов)

Луна удаляется от Земли со скоростью, равной 3.8 см/год. Как изменится энергия вращения Земли за это время? Считать известными энергию гравитационного взаимодействия Земли и Луны $U = -G \cdot M_3 \cdot M_{\text{Л}} / R$, а также соответствующую силу притяжения $F = G \cdot M_3 \cdot M_{\text{Л}} / R^2$. Использовать следующие константы: масса Земли $M_3 = 5.97 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны $M_{\text{Л}} = 7.35 \cdot 10^{22}$ кг, расстояние между Землей и Луной $R = 384400$ км, $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

Решение

Будем считать, что Луна находится на круговой орбите. Для того, чтобы эта орбита была стабильной, центростремительное ускорение должно совпадать с центростремительным:

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R} = a_{\text{гс}} = \frac{F}{M_{\text{Л}}} = G \frac{M_3}{R^2}.$$

Здесь v – скорость движения Луны по орбите. На основании предыдущего равенства можно получить связь между кинетической (T) и потенциальной (U) энергиями Луны:

$$T = \frac{M_{\text{Л}} \cdot v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot G \frac{M_3 \cdot M_{\text{Л}}}{R} = \frac{U}{2}.$$

Изменение T и U при увеличении радиуса здесь уже можно считать с помощью калькулятора. Тем не менее, изменение расстояния очень мало, так что погрешность расчета может оказаться высокой. Поэтому, лучше выразить изменение энергии через ΔR в явной форме. Для этого используем формулу, указанную в условии Задачи 2:

Малое приращение функции $y = 1/x$ можно считать по формуле $\Delta y = -1/x^2 \cdot \Delta x$.

Таким образом,

$$\Delta U = \Delta \left(-G \frac{M_3 \cdot M_{\text{Л}}}{R} \right) = G \frac{M_3 \cdot M_{\text{Л}}}{R^2} \Delta R = -U \cdot \frac{\Delta R}{R}.$$

Учитывая, что $T = -U/2$, можно сразу написать, что

$$\Delta T = -\frac{\Delta U}{2} = -G \frac{M_3 \cdot M_{\text{Л}}}{2R^2} \Delta R = U \cdot \frac{\Delta R}{2R}.$$

Полное изменение энергии Луны E оказывается равным

$$\Delta E = \Delta U + \Delta T = \Delta U - \frac{\Delta U}{2} = \frac{\Delta U}{2} = G \frac{M_3 \cdot M_{\text{Л}}}{2R^2} \Delta R.$$

В системе Земля-Луна должен работать закон сохранения энергии. Приливные силы, действующие на Землю со стороны Луны, замедляют её вращение вокруг своей оси. С учетом увеличения энергии Луны ΔE и закона сохранения энергии, энергия вращения Земли должна уменьшиться на величину ΔE . Подстановка числовых значений даёт

$$\Delta E = 6.6743 \times 10^{-11} \cdot \frac{5.97 \times 10^{24} \cdot 7.35 \times 10^{22}}{2 \cdot (384400 \cdot 10^3)^2} - 3.8 \times 10^{-2} = 3.8 \times 10^{18} \text{ Дж.}$$

Ответ: Энергия вращения Земли уменьшится на $\Delta E = 3.8 \cdot 10^{18}$ Дж.

Критерии оценивания

1. Решение демонстрирует правильное понимание связи между изменением механической энергии Луны на орбите и замедлением вращения Земли: **до 8 баллов**;
2. Получены формулы для расчета скорости и/либо кинетической энергии Луны на стационарной орбите: **до 8 баллов**;
3. Получена формула для расчета изменения механической энергии Луны (суммы кинетической и потенциальной энергий), связанного с её удалением от Земли: **до 5 баллов**;
4. Получено численное значение изменения механической энергии Луны с разумной точностью, на основании правильного решения: **до 4 баллов**.