

Задача 1. Ступень эскалатора (25 баллов)

Торопящийся пассажир метро поднимается вдоль лестницы эскалатора со скоростью 5 км/ч. Сама лестница движется со скоростью 4 км/ч под углом 30 градусов к горизонту. Какое количество ступеней преодолеет пассажир на эскалаторе, если высота подъёма составляет 60 метров, а высота одной ступени – 20 см?

Решение

Если лестница эскалатора, наклоненная под углом 30 градусов к горизонту, поднимается на 60 метров, то длина лестницы:

$$L = \frac{60 \text{ м}}{\sin(30^\circ)} = \frac{60 \text{ м}}{1/2} = 120 \text{ м}.$$

Суммарная скорость v движения пассажира вдоль эскалатора, включающая его собственную скорость, а также скорость лестницы:

$$v = (5 + 4) \text{ км/ч} = 9 \text{ км/ч} = 150 \text{ м/мин}.$$

Таким образом, пассажир переместится от нижней точки эскалатора к верхней точке за время

$$t = L / v = 120 \text{ м} / 150 \text{ м/мин} = 0.8 \text{ мин}.$$

За это время пассажир пройдет вдоль движущейся лестницы расстояние

$$S = t \cdot v_{\text{пассажира}} = 0.8 \text{ мин} \cdot (5 \cdot 1000 / 60) \text{ м/мин} = 66.67 \text{ м}.$$

С учетом наклона эскалатора, высота подъема пассажира вдоль движущейся лестницы составит

$$H = S \cdot \sin(30^\circ) = 0.5 \cdot S = 33.3 \text{ м}.$$

Высота одной ступени h составляет 0.2 м. Количество ступеней, пройденных пассажиром:

$$N = H / h = 166.7 \approx 166.$$

Округление произведено к меньшему ближайшему целому, поскольку 167-я ступень не пройдена целиком. Тем не менее, значение третьей значащей цифры находится в пределах погрешности исходных данных, а способ округления не связан с физическим смыслом задачи. Поэтому, ответ 167 ступеней допустим.

Ответ: 166 ступеней

Критерии оценивания

1. Правильно определено время нахождения пассажира на эскалаторе: **до 6 баллов**;
2. Правильно рассмотрено перемещение пассажира относительно движущейся лестницы: **до 8 баллов**;

3. Угол наклона эскалатора правильно использован для расчета вертикального перемещения пассажира: **до 6 баллов**;

4. Получен правильный ответ: **до 5 баллов**.

Задача 2. Время в пути (25 баллов)

Путешественник отправляется из пункта А в пункт Б на метро, без пересадок. С поверхности к станциям А и Б ведут эскалаторы. Чтобы не терять времени, вдоль эскалаторов путешественник идёт пешком: вверх по эскалатору со скоростью 4 км/час, а вниз – со скоростью 8 км/час (указаны скорости перемещения вдоль ленты эскалатора). Обратный путь по эскалаторам с такими же скоростями занял немного меньше времени, разница оказалась равной 14.4 секунды. Известно, что сумма времен движения по эскалаторам в прямом и обратном направлениях составила 160.5 секунды, а время подъёма на станции Б равнялось 72 секундам. Какой была высота эскалатора на станции Б? Считать, что скорости эскалаторов А и Б одинаковы, независимо от направления движения. Наклон ленты эскалатора относительно горизонтали составляет 30 градусов.

Решение

Пусть t_+ - время перемещения путешественника из пункта А в пункт В, а t_- - в обратном направлении, из пункта В в пункт А. Из условия задачи известны сумма и разность этих времен:

$$\begin{cases} t_+ + t_- = 160.5 \text{ с;} \\ t_+ - t_- = 14.4 \text{ с.} \end{cases}$$

Решение системы даёт значения $t_+ = 87.45 \text{ с}$, $t_- = 73.05 \text{ с}$. Эти же времена могут быть рассчитаны как

$$\begin{aligned} t_+ &= \frac{L_A}{v_0 + v_{\downarrow}} + \frac{L_B}{v_0 + v_{\uparrow}} = 87.45 \text{ с;} \\ t_- &= \frac{L_A}{v_0 + v_{\uparrow}} + \frac{L_B}{v_0 + v_{\downarrow}} = 73.05 \text{ с.} \end{aligned}$$

Здесь L_A , L_B – длины эскалаторов на станциях А и В, v_0 – скорость эскалаторов, $v_{\uparrow}$ – скорость движения путешественника вверх вдоль эскалатора (относительно лестницы), $v_{\downarrow}$ – скорость движения путешественника вниз. Согласно условию задачи, $v_{\uparrow} = 4 \text{ км/час} = 1.11 \text{ м/с}$, $v_{\downarrow} = 8 \text{ км/час} = 2.22 \text{ м/с}$.

Скорость эскалатора неизвестна, так же как L_A и L_B . Известно время подъёма на станции В ($t_{B\uparrow}$):

$$t_{B\uparrow} = \frac{L_B}{v_0 + v_{\uparrow}} = 72 \text{ с.}$$

Отсюда можно найти время спуска на станции А:

$$t_{A\downarrow} = \frac{L_A}{v_0 + v_{\downarrow}} = 15.45 \text{ с.}$$

Теперь, время обратного пути по эскалаторам может быть записано в форме

$$t_{\downarrow} = \frac{L_A}{v_0 + v_{\uparrow}} + \frac{L_B}{v_0 + v_{\downarrow}} = t_{A\downarrow} \cdot \frac{v_0 + v_{\downarrow}}{v_0 + v_{\uparrow}} + t_{B\uparrow} \cdot \frac{v_0 + v_{\uparrow}}{v_0 + v_{\downarrow}}.$$

Отсюда можно прямо переходить к квадратному уравнению для определения v_0 . Тем не менее, для упрощения выкладок, обозначим

$$\frac{v_0 + v_{\downarrow}}{v_0 + v_{\uparrow}} \equiv x. \quad (*)$$

Теперь

$$t_{\downarrow} = t_{A\downarrow} \cdot x + t_{B\uparrow} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow t_{A\downarrow} \cdot x^2 - t_{\downarrow} \cdot x + t_{B\uparrow} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{t_{\downarrow} \pm \sqrt{t_{\downarrow}^2 - 4 t_{A\downarrow} \cdot t_{B\uparrow}}}{2 \cdot t_{A\downarrow}} = \begin{pmatrix} 3.33 \\ 1.40 \end{pmatrix}.$$

Из соотношения (*) следует, что

$$v_0 = \frac{v_{\downarrow} - x \cdot v_{\uparrow}}{x - 1},$$

так что $v_0(x_1) = -2.28$ км/час, $v_0(x_2) = 6.00$ км/час. Физический смысл имеет только второе значение, так что $v_0(x_2) = 6.00$ км/час = 1.67 м/с (использованы три значащие цифры, для снижения вычислительной погрешности промежуточных расчетов).

Высоту эскалатора на станции Б находим через $t_{B\uparrow}$, учитывая наклон эскалатора относительно горизонтали:

$$H_B = L_B \cdot \sin(30^\circ) = t_{B\uparrow} \cdot (v_0 + v_{\uparrow}) \cdot \sin(30^\circ) =$$

$$= (72 \text{ с}) \cdot (1.67 \text{ м/с} + 1.11 \text{ м/с}) \cdot 1/2 = 100.1 \approx 100 \text{ м.}$$

Ответ записан как 100 м, поскольку наименьшая точность исходных данных - одна значащая цифра. Ответ 100.1 содержал бы 4 значащие цифры, что не соответствует точности исходных данных.

Ответ: высота эскалатора на станции Б равна 100 м.

Критерии оценивания

1. Записана система уравнений, позволяющая определить скорость и длины (либо высоты) эскалаторов: **до 8 баллов**;
2. Получено квадратное уравнение для определения скорости эскалаторов: **до 8 баллов**;
3. Найдена скорость движения эскалаторов: **до 4 баллов**;

4. Найдена длина эскалатора на станции Б: **до 2 баллов.**

5. При определении высоты эскалатора на станции Б правильно учтен его наклон: **до 3 баллов.**

Задача 3. Комета у Солнца (25 баллов)

К Солнцу приближается ледяная комета, имевшая вдали от него температуру T_0 . Поток тепла от Солнца разогревает внешние слои кометы так, что они испаряются. В результате, радиус кометы уменьшается на 10 %. Температура оставшегося льда остается равной T_0 , в связи с низкой теплопроводностью. До какой температуры нагрелся бы на месте кометы железный метеорит той же массы, получивший столько же солнечного тепла? Полагать, что теплопроводность железа настолько высока, что температура всего объема метеорита равна температуре поверхности. Считать, что энергия, необходимая для нагрева единицы массы кометы с последующим испарением, такова же, как на Земле при нормальных условиях. Полагать, что на Земле вода испарялась бы при температуре, равной 100°C . Принять удельную теплоёмкость льда равной $2100 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, удельную теплоту плавления льда равной $3.34\cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$, удельную теплоёмкость воды равной $4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, удельную теплоту парообразования воды равной $2.26\cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$, удельную теплоёмкость железа равной $460 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$.

Решение

Если радиус кометы R уменьшается на 10%, то радиус её сохранившегося ядра будет иметь значение $0.9\cdot R$. Тогда, масса испарившихся слоёв кометы:

$$\Delta m = \frac{4}{3} \pi \cdot \rho \cdot (R^3 - (0.9 R)^3) = \frac{4}{3} \pi \cdot \rho \cdot R^3 (1 - 0.9^3) = 0.271 \cdot m.$$

Здесь m – исходная масса кометы, ρ – плотность кометы (фактически не используется).

Нагрев, плавление и последующее испарение массы Δm потребуют энергии

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta m \cdot ((0^\circ\text{C} - T_0) \cdot c_{\text{льда}} + (100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) \cdot c_{\text{воды}} + \lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}}) = \\ &= 0.271 \cdot m \cdot (c_{\text{воды}} \cdot 100^\circ\text{C} + \lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}} - c_{\text{льда}} \cdot T_0) \end{aligned}$$

Температуру T_0 здесь нужно представлять в градусах Цельсия. Согласно условию задачи, необходимо найти температуру T железного метеорита массы m , который получит энергию ΔE при начальной температуре T_0 . При условии, что T меньше, чем температура плавления железа, получается следующее:

$$m \cdot ((T - T_0) \cdot c_{\text{железа}}) = \Delta E = 0.271 \cdot m \cdot (c_{\text{воды}} \cdot 100^\circ\text{C} + \lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}} - c_{\text{льда}} \cdot T_0).$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} T &= T_0 + 0.271 \cdot \left(\frac{c_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} \cdot 100^\circ\text{C} + \frac{\lambda_{\text{воды}} + \lambda_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} - \frac{c_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} \cdot T_0 \right) = \\ &= T_0 \cdot \left(1 - 0.271 \cdot \frac{c_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} \right) + 0.271 \cdot \left(\frac{c_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} \cdot 100^\circ\text{C} + \frac{\lambda_{\text{воды}} + \lambda_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} \right) \end{aligned}$$

Подстановка численных значений, предложенных в задаче, даёт результат

$$T = T_0 \cdot \left(1 - 0.2372 \cdot \frac{c_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} \right) + 0.2372 \cdot \left(\frac{c_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} \cdot 100^\circ\text{C} + \frac{\lambda_{\text{воды}} + \lambda_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} \right) = 1776^\circ\text{C} - 0.2372 \cdot T_0 \quad (*)$$

Важно отметить, что $T_0 < 0^\circ\text{C}$, поскольку комета – ледяная (температура T_0 во всех формулах выше должна быть представлена в градусах Цельсия, поскольку так представлены температуры плавления льда и кипения воды). Таким образом, температура железного метеорита T получается большей, чем 1776°C . С другой стороны, температура плавления железа составляет 1538°C .

После нагрева до температуры плавления, железный метеорит начинает плавиться. Удельная теплота плавления железа составляет $2.70 \cdot 10^5$ Дж/кг. При использовании этого значения получается, что величина $m \cdot \left((T - T_0) \cdot c_{\text{железа}} + \lambda_{\text{железа}} \right)$ превышает значение ΔE при всех отрицательных значениях T_0 от нуля до -273°C (абсолютный нуль температуры):

$$m \cdot \left((T - T_0) \cdot c_{\text{железа}} + \lambda_{\text{железа}} \right) > \Delta E = 0.2372 \cdot m \cdot \left(c_{\text{воды}} \cdot 100^\circ\text{C} + \lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}} - c_{\text{льда}} \cdot T_0 \right).$$

Таким образом, железный метеорит не расплавится полностью. Следовательно, его температура останется равной температуре плавления железа (1538°C) при всех значениях T_0 .

Температура и удельная теплота плавления железа могли не быть известными участникам олимпиады. Таким образом, допустимы следующие варианты ответа:

- $T = T_{\text{плавления железа}}$, при наличии количественного обоснования, подобного рассмотренному выше;

- $T = 1776^\circ\text{C} - 0.2372 \cdot T_0$, если прямо указано, что температура T должна быть меньшей, чем температура плавления железа, неизвестная автору решения.

Ответ: $T = T_{\text{плавления железа}}$.

Критерии оценивания

1. Правильно определена масса испарившихся слоев кометы: **до 6 баллов**;
2. Правильно записана энергия ΔE , потребовавшаяся для испарения вещества кометы: **до 6 баллов**;
3. Правильно использована связь между энергией ΔE и температурой железного метеорита: **до 6 баллов**;
4. Указано, что железный метеорит мог нагреться до своей температуры плавления: **до 3 баллов**.
5. Приведен один из вариантов правильного ответа: **до 3 баллов**.

Задача 4. Шар на нити (10 баллов)

Полый шар, массой которого можно пренебречь, закреплен тонкой нитью внутри цилиндрического сосуда (см. Рисунок). Для испытания нити на прочность, сосуд постепенно заполняют водой, и она рвется, как только шар скрывается под водой полностью. Как можно определить прочность этой же нити в похожем эксперименте (с использованием воды), заменив невесомый шар в сосуде резиновым шаром того же

размера? Принять плотность воды равной 1 г/см^3 , плотность резины равной 1.5 г/см^3 . Ответ обосновать расчетами.

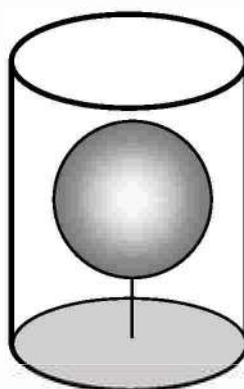


Рисунок к Задаче 4

Решение

Согласно условию задачи, масса шара пренебрежимо мала. Нужно считать, что сила тяжести на этот шар не действует. Действуют на шар силы Архимеда и натяжения нити. Полагаем, что нить рвется тогда, сила Архимеда превысит максимальную силу натяжения нити $T_{\max}$. При полном погружении шара силу Архимеда можно рассчитать по формуле

$$F_A = g \cdot V_{\text{шара}} \cdot \rho_{\text{воды}}, \quad (1)$$

где $\rho_{\text{воды}}$ – массовая плотность воды; $V_{\text{шара}}$, $R_{\text{шара}}$ – объём и радиус шара, g – ускорение свободного падения, равное 9.8 м/с^2 . До тех пор, пока шар не был погружен в воду полностью, объём вытесненной им воды был меньшим, чем объём самого шара, так что и сила Архимеда была меньшей, чем рассчитываемая по формуле (1). До полного погружения шара нить не рвалась, так что именно формула (1) даёт силу Архимеда, равную $T_{\max}$.

На резиновый шар действует сила тяжести, причём его плотность выше, чем плотность воды. Если оставить ориентацию сосуда такой же, как на Рисунке к задаче, то нить не порвется ни при каких уровнях воды, поскольку резиновый шар будет лежать на дне сосуда. Для того, чтобы испытать нить на прочность, сосуд необходимо перевернуть.

Если перевернутый сосуд будет расположен вертикально, то на резиновый шар будет действовать сила тяжести F_T , направленная вниз. В отсутствие воды нить порвется, поскольку сила тяжести превысит $T_{\max}$:

$$F_T = g \cdot V_{\text{шара}} \cdot \rho_{\text{резины}} > g \cdot V_{\text{шара}} \cdot \rho_{\text{воды}} \quad (2)$$

При этом, значение $T_{\max}$ останется неизвестным.

Для того, чтобы скомпенсировать силу тяжести, перевернутый сосуд можно заполнить водой до необходимого уровня. На шар будут действовать силы Архимеда и натяжения нити, направленные вверх (противоположно силе тяжести). Разность сил тяжести и Архимеда составит

$$\Delta F_{T-A} = g \cdot (V_{\text{шара}} \cdot \rho_{\text{резины}} - V_{\text{воды}} \cdot \rho_{\text{воды}}), \quad (3)$$

где $\rho_{\text{резины}}$ – массовая плотность резинового шара; $V_{\text{воды}}$ – объём воды, вытесненный шаром. Шар может быть погружен в воду лишь частично, так что $V_{\text{воды}} \neq V_{\text{шара}}$.

Для измерения прочности нити нужно обеспечить равенство модулей F_{T-A} и T_{max} :

$$T_{max} = g \cdot \rho_{\text{воды}} \cdot V_{\text{шара}} = \Delta F_{T-A} = g \cdot (V_{\text{шара}} \cdot \rho_{\text{резины}} - V_{\text{воды}} \rho_{\text{воды}}) \Rightarrow$$

$$V_{\text{воды}} = V_{\text{шара}} \cdot \frac{(\rho_{\text{резины}} - \rho_{\text{воды}})}{\rho_{\text{воды}}} = V_{\text{шара}} \cdot \left(\frac{\rho_{\text{резины}}}{\rho_{\text{воды}}} - 1 \right). \quad (5)$$

Подстановка чисел из условия задачи даёт объём воды, вытесняемой шаром при максимальном натяжении нити:

$$V_{\text{воды}} = V_{\text{шара}} \cdot \left(\frac{\rho_{\text{резины}}}{\rho_{\text{воды}}} - 1 \right) = V_{\text{шара}} \cdot \left(\frac{1.5 \text{ г/см}^3}{1.0 \text{ г/см}^3} - 1 \right) = 0.5 \cdot V_{\text{шара}}. \quad (6)$$

Таким образом, шар должен быть погружен в воду наполовину.

Ответ: для определения прочности нити с использованием резинового шара нужно перевернуть сосуд и заполнить его водой так, чтобы шар был погружен в воду наполовину.

Критерии оценивания

1. Правильно рассмотрены силы Архимеда и натяжения нити, действующие на невесомый шар: **до 5 баллов;**
2. Получена формула, связывающая силу Архимеда и прочность нити: **до 5 баллов;**
3. Указано, что для измерения прочности нити с помощью резинового шара сосуд необходимо перевернуть и частично заполнить водой: **до 5 баллов;**
4. Предложена конкретная методика определения максимальной силы натяжения нити с использованием резинового шара: **до 5 баллов;**
5. Найдена степень погружения резинового шара в воду, обеспечивающая измерение прочности нити: **до 5 баллов.**