

Задача 1. Два шарика (25 баллов)

Два одинаковых шарика выстреливают вертикально вверх со скоростями, равными 20 м/с. Второй шарик начинает движение через 3 секунды после первого. К моменту возвращения шариков в точку их вылета расположена твердая горизонтальная поверхность, от которой шарик упруго отскакивает вверх. В какой момент времени, от начала эксперимента, второй шарик вернется в точку вылета в третий раз? Столкновения шариков считать абсолютно упругими. Полагать, что размерами шариков по сравнению с высотой их подъема можно пренебречь.

Решение

Для решения задачи необходимо правильно описать столкновение шариков. При упругом столкновении выполняются законы сохранения энергии, а также импульса. Центр масс одинаковых шариков, имеющих скорости v_1 и v_2 , движется со скоростью

$$V = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Скорости v_1 и v_2 складываются с учетом знака. В системе отсчета, связанной с центром инерции, скорости шариков имеют следующие значения:

$$v_1' = v_1 - V = v_1 - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 - v_2}{2};$$

$$v_2' = v_2 - V = v_2 - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_2 - v_1}{2} = -v_1'.$$

В системе центра инерции суммарный импульс шариков равен нулю – как до столкновения, так и после. Таким образом, скорости v_1' и v_2' после столкновения должны оставаться равными по модулю и противоположными по знаку. Сохранение кинетической энергии приводит к тому, что модули скоростей v_1' и v_2' после столкновения шариков равны модулям до столкновения.

Обозначим скорости шариков в системе центра инерции после столкновения через $v_1^{/*}$ и $v_2^{/*}$. Изложенные выше соображения приводят к тому, что

$$v_1^{/*} = -v_1' = \frac{v_2 - v_1}{2}; \quad v_2^{/*} = -v_2' = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

Для перехода к «неподвижной» лабораторной системе отсчета нужно сложить скорости $v_1^{/*}$ и $v_2^{/*}$ со скоростью центра инерции V . Если v_1^* и v_2^* – скорости шариков в лабораторной системе отсчета после столкновения, то

$$v_1^* = v_1^{/*} + V = \frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2 + v_1}{2} = v_2;$$

$$v_2^* = v_2^{/*} + V = \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_2 + v_1}{2} = v_1.$$

Можно полагать, что после столкновения шарики «меняются местами»: второй продолжает движение со скоростью первого, а первый – со скоростью второго. Имеются в

виду не только модули скоростей, но и знаки. Согласно условию задачи, размерами шариков можно пренебречь по сравнению с высотой подъёма. Значит, длина пути шариков не зависит от их количества. Таким образом, можно рассматривать «виртуальные» шарики, движущиеся по той же самой траектории, что реальные, однако прозрачные друг для друга – не сталкивающиеся между собой.

Виртуальный шарик достигнет максимальной высоты тогда, когда его скорость $v(t)$ станет равной нулю. Замедление шарика обусловлено ускорением свободного падения g , так что

$$v(t_0) = v(0) - gt_0 = 0 \Rightarrow t_0 = v(0)/g = 20/9.8 = 2.04 \text{ с.}$$

Здесь t_0 – время достижения максимальной высоты подъёма. Время возвращения в точку вылета – $t_1 = 2 \cdot t_0 = 4.08 \text{ с}$. Второй виртуальный шарик начинает движение через 3 секунды после первого, так что вернется в исходную точку к моменту $t_2 = 4.08 + 3 = 7.08 \text{ с}$. Первый виртуальный шарик отразится от поверхности, снова достигнет максимальной высоты и вернется назад к моменту $t_3 = 2 \cdot t_0 = 8.16 \text{ с}$.

Вернемся к рассмотрению реальных шариков, сталкивающихся друг с другом. В этом случае, второй шарик всегда будет ниже первого, так что именно этот шарик будет отражаться от поверхности. Моменты времени, соответствующие столкновениям второго шарика с поверхностью, совпадут с моментами t_1 , t_2 , t_3 . Таким образом, ответ задачи: $t_3 = 8.16 \text{ с}$.

Ответ: $t_3 = 8.16 \text{ с}$. Допустимо полагать $g = 10 \text{ м/с}^2$; тогда $t_3 = 8.0 \text{ с}$.

Критерии оценивания

1. Правильно описано вертикальное движение шариков в поле силы тяжести: **до 6 баллов**;
2. Правильно рассмотрено изменение скоростей шариков при столкновениях: **до 8 баллов**;
3. Правильно рассмотрено влияние столкновений шариков на их траектории (либо правильно применена модель виртуальных независимых шариков, использованная в решении выше): **до 8 баллов**;
4. Правильно получен и сформулирован ответ задачи: **до 3 баллов**.

Задача 2. Смещение звёзд (25 баллов)

Космический путешественник вынужден остановиться на незнакомой планете для ремонта звездолета. Ремонт потребовал целого года, то есть всего периода обращения этой планеты вокруг своей звезды. Путешественник замечает, что за время ремонта все звезды ночного неба смещались не менее чем на 30 угловых секунд относительно положений, вычисленных корабельным компьютером по трехмерным координатам этих звезд в космическом пространстве. Каков радиус орбиты планеты, если продолжительность года совпала с длительностью года на Земле?

Решение

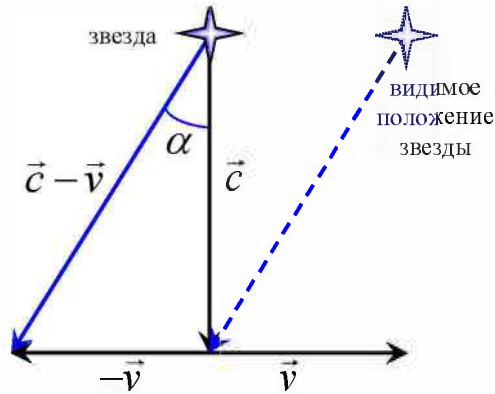


Рисунок 1

Эффект, рассмотренный в задаче, обусловлен абберацией света. Угол, под которым звезда видна на небесной сфере, определяется сложением векторов скорости света, идущего от звезды к Земле (вектор $\vec{c}$ на Рисунке 1), и вектора орбитальной скорости планеты $\vec{v}$, взятого со знаком «минус». Сложение указанных векторов и знак «минус» возникают при переходе от системы отсчета, связанной с космосом (который упрощенно считаем неподвижным) к системе отсчета планеты, движущейся вокруг своей звезды.

Отметим, что для строгого решения задачи переходить в систему отсчета движущейся планеты нужно с использованием специальной теории относительности. При этом получается, что

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \frac{v}{c}.$$

С другой стороны, орбитальная скорость планеты мала по сравнению со скоростью света, в связи с чем решение без специальной теории относительности вполне возможно. Именно такого решения можно ожидать на школьном уровне, его достаточно для максимального оценивания работы. Указанное приближение и показано на Рисунке 1:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{v}{c}.$$

Видимое положение звезды будет изменяться в течение года, в зависимости от взаимной ориентации векторов $\vec{c}$ и $\vec{v}$. Формулировка задачи позволяет выбрать для решения произвольную звезду. Наиболее простым представляется выбор любой из звезд, расположенных в той же плоскости, что и орбита планеты. Такая звезда в течение года будет смещаться по прямой вдоль эклиптики – проекции орбиты планеты на небесную сферу. Среднее положение будет соответствовать отсутствию абберации ($\alpha = 0$), тогда как крайние положения – тем моментам времени, когда векторы $\vec{v}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны (Рисунок 2). В эти моменты угловое смещение звезды относительно среднего положения достигнет максимального значения

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{c}\right) \approx \frac{v}{c} = 30'' = 1.45 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

$$\left(\text{секунды в радианы: } 1.45 \cdot 10^{-4} = \frac{30'' \cdot \pi}{3600 \cdot 180^\circ} \right)$$

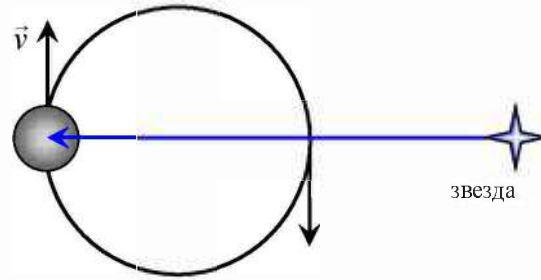


Рисунок2

Таким образом, орбитальная скорость планеты:

$$v = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot c \approx \alpha \cdot c = 1.45 \cdot 10^{-4} \cdot 3.00 \cdot 10^5 = 43.5 \text{ км/с}$$

(расчет с большим количеством значащих цифр даёт 43.6 км/с)

Примем продолжительность земного года равной 365 дням. Пересчет в секунды:

$$1 \text{ год} = 365 \text{ суток} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 3.15 \cdot 10^7 \text{ с.}$$

Длина пути планеты в течение года (L) является произведением орбитальной скорости на это время:

$$L = 3.15 \cdot 10^7 \times 43.6 = 1.38 \cdot 10^9 \text{ км.}$$

Радиус орбиты получаем как $R = L/2\pi$:

$$R = L/2\pi = 2.19 \cdot 10^8 \text{ км.}$$

Отметим, что использование более точной длины года, равной 365.25 суток, не изменяет первых трех значащих цифр ответа.

Ответ: радиус орбиты планеты равен $2.19 \cdot 10^8$ км.

Критерии оценивания

1. Показано правильное понимание явления, рассматриваемого в задаче: **до 12 баллов**;
2. Правильно получена орбитальная скорость планеты, с учетом углового смещения звезд: **до 6 баллов**;
3. Получена правильная формула для расчета радиуса орбиты планеты: **до 4 баллов**;
4. Получен правильный ответ: **до 3 баллов**.

Задача 3. Комета у Солнца (25 баллов)

К Солнцу приближается ледяная комета, имевшая вдали от него температуру T_0 . Поток тепла от Солнца разогревает внешние слои кометы так, что они испаряются. В результате, радиус кометы уменьшается на 10 %. Температура оставшегося льда остается равной T_0 , в связи с низкой теплопроводностью. До какой температуры нагрелся бы на месте кометы железный метеорит той же массы, получивший столько же солнечного тепла? Полагать, что

теплопроводность железа настолько высока, что температура всего объёма метеорита равна температуре поверхности. Считать, что энергия, необходимая для нагрева единицы массы кометы с последующим испарением, такова же, как на Земле при нормальных условиях. Полагать, что на Земле вода испарялась бы при температуре, равной 100°C . Принять удельную теплоёмкость льда равной $2100 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$, удельную теплоту плавления льда равной $3.34\cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$, удельную теплоёмкость воды равной $4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$, удельную теплоту парообразования воды равной $2.26\cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$, удельную теплоёмкость железа равной $460 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$.

Решение

Если радиус кометы R уменьшается на 10% , то радиус её сохранившегося ядра будет иметь значение $0.9\cdot R$. Тогда, масса испарившихся слоёв кометы:

$$\Delta m = \frac{4}{3}\pi \cdot \rho \cdot (R^3 - (0.9R)^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot \rho \cdot R^3 (1 - 0.9^3) = 0.271 \cdot m.$$

Здесь m – исходная масса кометы, ρ – плотность кометы (фактически не используется).

Нагрев, плавление и последующее испарение массы Δm потребуют энергии

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta m \cdot ((0^{\circ}\text{C} - T_0) \cdot c_{\text{льда}} + (100^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C}) \cdot c_{\text{воды}} + \lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}}) = \\ &= 0.271 \cdot m \cdot (c_{\text{воды}} \cdot 100^{\circ}\text{C} + \lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}} - c_{\text{льда}} \cdot T_0) \end{aligned}$$

Температуру T_0 здесь нужно представлять в градусах Цельсия. Согласно условию задачи, необходимо найти температуру T железного метеорита массы m , который получит энергию ΔE при начальной температуре T_0 . При условии, что T меньше, чем температура плавления железа, получается следующее:

$$m \cdot ((T - T_0) \cdot c_{\text{железа}}) = \Delta E = 0.271 \cdot m \cdot (c_{\text{воды}} \cdot 100^{\circ}\text{C} + \lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}} - c_{\text{льда}} \cdot T_0).$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} T &= T_0 + 0.271 \cdot \left(\frac{c_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} \cdot 100^{\circ}\text{C} + \frac{\lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} - \frac{c_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} \cdot T_0 \right) = \\ &= T_0 \cdot \left(1 - 0.271 \cdot \frac{c_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} \right) + 0.271 \cdot \left(\frac{c_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} \cdot 100^{\circ}\text{C} + \frac{\lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} \right) \end{aligned}$$

Подстановка численных значений, предложенных в задаче, даёт результат

$$T = T_0 \cdot \left(1 - 0.271 \cdot \frac{c_{\text{льда}}}{c_{\text{железа}}} \right) + 0.271 \cdot \left(\frac{c_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} \cdot 100^{\circ}\text{C} + \frac{\lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}}}{c_{\text{железа}}} \right) = 1776^{\circ}\text{C} - 0.2372 \cdot T_0 \quad (*)$$

Важно отметить, что $T_0 < 0^{\circ}\text{C}$, поскольку комета – ледяная (температура T_0 во всех формулах выше должна быть представлена в градусах Цельсия, поскольку так представлены температуры плавления льда и кипения воды). Таким образом, температура железного метеорита T получается большей, чем 1776°C . С другой стороны, температура плавления железа составляет 1538°C .

После нагрева до температуры плавления, железный метеорит начинает плавиться. Удельная теплота плавления железа составляет $2.70\cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$. При использовании этого

значения получается, что величина $m \cdot ((T - T_0) \cdot c_{\text{железа}} + \lambda_{\text{железа}})$ превышает значение ΔE при всех отрицательных значениях T_0 от нуля до -273°C (абсолютный нуль температуры):

$$m \cdot ((T - T_0) \cdot c_{\text{железа}} + \lambda_{\text{железа}}) > \Delta E = 0.271 \cdot m \cdot (c_{\text{вода}} \cdot 100^\circ\text{C} + \lambda_{\text{льда}} + \lambda_{\text{воды}} - c_{\text{льда}} \cdot T_0).$$

Таким образом, железный метеорит не расплавится полностью. Следовательно, его температура останется равной температуре плавления железа (1538°C) при всех значениях T_0 .

Температура и удельная теплота плавления железа могли не быть известными участникам олимпиады. Таким образом, допустимы следующие варианты ответа:

- $T = T_{\text{плавления железа}}$, при наличии количественного обоснования, подобного рассмотренному выше;
- $T = 1776^\circ\text{C} - 0.2372 \cdot T_0$, если прямо указано, что температура T должна быть меньше, чем температура плавления железа, неизвестная автору решения.

Ответ: $T = T_{\text{плавления железа}}$.

Критерии оценивания

1. Правильно определена масса испарившихся слоев кометы: **до 6 баллов**;
2. Правильно записана энергия ΔE , потребовавшаяся для испарения вещества кометы: **до 6 баллов**;
3. Правильно использована связь между энергией ΔE и температурой железного метеорита: **до 6 баллов**;
4. Указано, что железный метеорит мог нагреться до своей температуры плавления: **до 3 баллов**.
5. Приведен один из вариантов правильного ответа: **до 3 баллов**.

Задача 4. Шар на нити (25 баллов)

Полый шар, массой которого можно пренебречь, закреплен тонкой нитью внутри цилиндрического сосуда, заполненного водой (см. Рисунок). Для испытания нити на прочность, сосуд с шаром перемещают в лифте. Нить рвется, когда ускорение лифта составляет 0.1 от ускорения свободного падения g . Как можно определить прочность этой же нити в похожем эксперименте, заменив невесомый шар алюминиевым шаром того же размера? При какой силе натяжения рвется нить, если радиус шара равен 7 см? Принять плотность воды равной 1 г/см^3 , плотность алюминия равной 2.7 г/см^3 . Ответ обосновать расчетами.

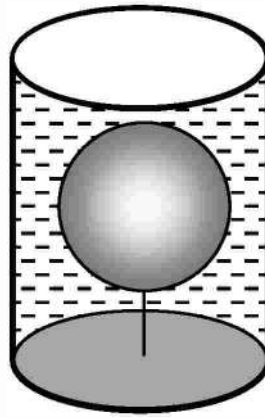


Рисунок к Задаче 4

Решение

Согласно условию задачи, масса шара пренебрежимо мала. Нужно считать, что сила тяжести на этот шар не действует. Действуют на шар силы Архимеда и натяжения нити. Полагаем, что нить рвется тогда, сила Архимеда превысит максимальную силу натяжения нити $T_{\max}$. Силу Архимеда можно рассчитывать по формуле

$$F_A = \rho_{\text{вод}} \cdot g \cdot V_{\text{шар}} = \rho_{\text{вод}} \cdot g \cdot \frac{4\pi}{3} R_{\text{шара}}^3. \quad (1)$$

В данной задаче g – это сумма двух ускорений, а именно ускорения свободного падения $g_0 = 9.8 \text{ м/с}^2$ и ускорения $g_{\text{инерции}}$, создаваемого силой инерции, возникающей в ускоряющемся лифте. Значение $g_{\text{инерции}}$ по модулю совпадает с ускорением лифта, а по знаку – противоположно.

Условием задачи не определено направление ускорения лифта. Возможные варианты:

1. Ускорение лифта направлено вверх. В этом случае ускорение $g_{\text{инерции}}$ направлено вниз, так что модули g_0 и $g_{\text{инерции}}$ в формуле (1) складываются:

$$g = g_0 + g_{\text{инерции}} = g_0 + 0.1 \cdot g_0 = 1.1 \cdot g_0. \quad (2)$$

Сила Архимеда и максимальная сила натяжения нити оказываются следующими:

$$\begin{aligned} F_{A,1} = T_{\max,1} &= 1.1 \cdot g_0 \cdot \rho_{\text{вод}} \cdot \frac{4\pi}{3} R_{\text{шара}}^3 = \\ &= 1.1 \cdot (9.8 \text{ м/с}^2) \cdot (1000 \text{ кг/м}^3) \cdot \frac{4\pi}{3} (0.07 \text{ м})^3 = 15.5 \text{ Н} \end{aligned} \quad (3)$$

2. Ускорение лифта направлено вниз. Теперь, ускорение $g_{\text{инерции}}$ направлено вверх, так что модули g_0 и $g_{\text{инерции}}$ входят в формулу (1) с противоположными знаками:

$$g = g_0 - g_{\text{инерции}} = g_0 - 0.1 \cdot g_0 = 0.9 \cdot g_0. \quad (4)$$

Соответственно,

$$F_{A,2} = T_{\max,2} = 0.9 \cdot g_0 \cdot \rho_{\text{воды}} \cdot \frac{4\pi}{3} R_{\text{шара}}^3 =$$

$$= 0.9 \cdot (9.8 \text{ м/с}^2) \cdot (1000 \text{ кг/м}^3) \cdot \frac{4\pi}{3} (0.07 \text{ м})^3 = 12.7 \text{ Н}$$
(5)

Алюминиевый шар имеет массу, причём его плотность выше, чем плотность воды. Если оставить ориентацию сосуда такой же, как на Рисунке к задаче, то нить не порвется ни при каких значениях g , поскольку алюминиевый шар будет лежать на дне сосуда. Для того, чтобы испытать нить на прочность, сосуд необходимо перевернуть.

Если перевернутый сосуд будет расположен вертикально, то на алюминиевый шар будут действовать сила тяжести F_T , направленная вниз, а также силы Архимеда и натяжения нити, направленные вверх. Разность сил тяжести и Архимеда составит

$$\Delta F_{T-A} = g \cdot V_{\text{шара}} \cdot (\rho_{\text{алюминия}} - \rho_{\text{воды}}) = g \cdot \frac{4\pi}{3} R_{\text{шара}}^3 \cdot (\rho_{\text{алюминия}} - \rho_{\text{воды}}).$$
(6)

В отсутствие ускорения лифта (при $g = g_0 = 9.8 \text{ м/с}^2$) $\Delta F_{T-A} = 23.9 \text{ Н}$, что существенно превышает максимальную силу натяжения нити $T_{\max}$. Для измерения $T_{\max}$ с помощью алюминиевого шара необходимо создать такую же силу ΔF_{T-A} . Это можно сделать в лифте, ускоряющемся вниз, что понизит эффективное значение g , аналогично формуле (4). Необходимое значение g даётся формулой

$$\Delta F_{T-A} = T_{\max} \Rightarrow g = \frac{T_{\max}}{V_{\text{шара}} \cdot (\rho_{\text{алюминия}} - \rho_{\text{воды}})} = \frac{3 \cdot T_{\max}}{4\pi \cdot R_{\text{шара}}^3 \cdot (\rho_{\text{алюминия}} - \rho_{\text{воды}})}.$$
(7)

Для случая $T_{\max,1} = 15.5 \text{ Н}$ получается значение g , равное 6.34 м/с^2 , тогда как при $T_{\max,2} = 12.7 \text{ Н}$ $g = 5.19 \text{ м/с}^2$. Соответственно, лифт должен двигаться с ускорением, направленным вниз, модуль которого даётся формулой

$$g_{\text{инерции}} = g_0 - g.$$
(8)

Получается, что при $T_{\max,1} = 15.5 \text{ Н}$ ускорение лифта $g_{\text{инерции}}$ должно быть равным 3.46 м/с^2 , тогда как при $T_{\max,2} = 12.7 \text{ Н}$ $g_{\text{инерции}} = 4.61 \text{ м/с}^2$.

Ответ: для определения прочности нити с использованием алюминиевого шара нужно перевернуть сосуд; при этом, лифт должен двигаться с ускорением g , направленным вниз: $g = 3.46 \text{ м/с}^2$ либо 4.61 м/с^2 .

Критерии оценивания

1. Правильно рассмотрены силы Архимеда и натяжения нити, действующие на невесомый шар: **до 4 баллов**;
2. Правильно учтено изменение силы Архимеда в ускоряющемся лифте: **до 4 баллов**;
3. Получены максимальные значения силы натяжения нити $T_{\max,1}$ либо $T_{\max,2}$ (достаточно одного из вариантов); при этом, правильно указано направление ускорения лифта, соответствующее каждому из этих случаев: **до 6 баллов**;
4. Указано, что для измерения прочности нити с помощью алюминиевого шара сосуд необходимо перевернуть: **до 4 баллов**.

5. Правильно найдены направление и модуль ускорения лифта, необходимые для определения прочности нити с помощью алюминиевого шара, при любом из значений максимальной силы натяжения нити $T_{\max,1}$ либо $T_{\max,2}$: **до 7 баллов.**