

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Российская академия народного хозяйства и государственной службы  
при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС  
Профиль «Экономика»

2022 – 2023 учебный год  
10 – 11 класс

Отборочный этап

**Задача 1. Максимум 15 баллов**

В небольшом городке сходятся попарно в пунктах А, В и С три основные прямолинейные магистрали. В городе построена кольцевая автодорога, которая также проходит через пункты А, В и С и представляет собой окружность. Длина магистралей внутри окружности составляет 7, 8 и 9 километров. В центре этой окружности расположена местная достопримечательность - телебашня. Внутри города раскинулся прекрасный ботанический сад, территорию которого ограничивает живая изгородь из кипарисов, высаженных по некоторой окружности, так что изгородь только один раз вплотную примыкает к каждой из магистралей. Власти города планируют построить навесной пешеходный мостик из самого центра ботанического сада прямо к телебашне. Вычислите планируемые расходы на строительство этого мостика, если они составляют 1 000 денежных единиц из расчета на 1 км расстояния между центром ботанического сада и телебашней.

**Решение.**

Математическая постановка задачи:

Стороны треугольника равны 7; 8; 9. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностями.

Стороны треугольника ABC равны: AB = 7, BC = 8, AC = 9.

O2 – центр вписанной окружности, O1- центр описанной окружности.

По теореме косинусов находим  $\cos\angle C$ :

$$49 = 81 + 64 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cos\angle C \rightarrow \cos\angle C = \frac{2}{3} \rightarrow \sin\angle C = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \sqrt{5}}{6} = 12\sqrt{5}; \text{ радиус описанной окружности } R = \frac{abc}{4S} = \frac{21}{2\sqrt{5}};$$

$$\text{радиус вписанной окружности } r = \frac{2S}{a+b+c} = \sqrt{5}.$$

$$\cos\angle C = \frac{2}{3} \rightarrow \operatorname{tg}\angle \frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Из } \triangle PO_2C \text{ находим } \frac{r}{PC} = \operatorname{tg}\angle \frac{C}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{PC} = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow PC = 5.$$

$$O_1K \perp AC \rightarrow KC = \frac{9}{2} \rightarrow PK = \frac{1}{2}; O_1K = \sqrt{R^2 - KC^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$O_1K = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$O_1S = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{5}}$$

Планируемые расходы:

$$1000 \cdot \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{5}} = \frac{500\sqrt{21}}{\sqrt{5}} \sim 1024,7$$

**Ответ:**  $\frac{500\sqrt{21}}{\sqrt{5}} \sim 1024,7$ .

**Критерии:**

- 1) Вычислен радиус описанной окружности – 3 б
- 2) Вычислен радиус вписанной окружности – 3 б
- 3) Вычислены радиусы вписанной и описанной окружностей – 7 б
- 4) Верно вычислены радиусы вписанной и описанной окружностей, ход вычисления  $O_1O_2$  верен, но допущены случайные ошибки, то 10 б
- 5) Полностью решение верное, ответ верный, то 15 б
- 6) Ход решения неверен (неверно поставлена математическая постановка задачи) - 0 б

**Задача 2. Максимум 10 баллов**

Компания S занимается производством изделий из дерева. Станки для обработки дерева уже износились, и руководство компании решило приобрести новые. Сам станок стоит 85 000 руб., его установка 5 000 руб. В таблице ниже показано распределение дохода компании и амортизации по годам. Срок реализации проекта 5 лет. Совокупный налог на прибыль 24 %.

	1-ый год	2-ой год	3-ий год	4-ый год	5-ый год
Доход (руб.)	20 000	30 000	40 000	50 000	50 000
Амортизация	7 000	7 000	7 000	7 000	7 000

- (а) Какой срок окупаемости оборудования?  
(б) Целесообразно ли приобретение данного станка?

**Решение**

формула для расчета срока окупаемости:  $T = \frac{K}{D}$ , где

K-полная сумма инвестиционных расходов на реализацию проекта

D-чистые поступления от реализации инвест. Проекта за период времени

K=стоимость оборудования + затраты на установку машины

$$K=85000+5000=90000$$

D=доход-налоги

$$\text{Налог} = \frac{\sum g}{100\%} \times 24\%$$

$$\text{Доход} = 190000$$

$$\text{Налог} = 190000/100 * 24 = 45600$$

$$Пч = 144400$$

$$T = 90000/144400/5 = 3.11$$

**Критерий оценки:**

1. Обосновано получен верный ответ: 10 баллов
2. Имеется верная цепочка рассуждений и получен верный ответ, однако, нет формул и объяснений (Даны формулы для расчета окупаемости, даны объяснения всех значений): 5 баллов
3. Написаны формулы, есть определенный ход решения, но получен неверный ответ 1 балл
4. Нет формул, нет определенного хода решения 0 баллов.

### **Задача 3. Максимум 10 баллов**

Обычно мы наблюдаем, что мировое производство вакцин против отдельной болезни осуществляется сравнительно малым количеством компаний. Представим себе, что возникла новая болезнь, против которой разные компании начали разработку вакцины. Рассмотрим два случая:

- 1) Решение о старте разработки принимают сами компании исходя из цели максимизации прибыли;
- 2) Решение о количестве компаний, привлеченных к исследованиям, принимают власти стран совместно, исходя из критерия максимизации общественного благосостояния.

Как будут соотноситься, на ваш взгляд, количество компаний, занимающихся разработкой новой вакцины, в этих двух случаях? От чего зависит это соотношение? Обоснуйте.

#### **Схема оценивания и краткое решение:**

В решении будем считать, что число компаний не влияет на потребительский излишек, поскольку вакцины являются социально значимым продуктом и цены и объем их производства регулируются государством. Поэтому величину потребительского излишка мы не будем сравнивать, сосредоточившись на анализе стороны производства.

- 1) Каждая компания принимает решение об участии в исследованиях, оценивая свои потенциальные доход и издержки. Издержки на исследования можно считать величиной, не зависящей от количества компаний. Доход же зависит от потенциальной выручки, которая зависит в свою очередь от числа успешных в разработке компаний, и от вероятности успеха самой компании.

Для простоты можем считать, что все потенциальные фирмы-разработчики одинаковы и при принятии решения об участии (при максимизации прибыли) выбирают оптимальный одинаковый уровень инвестиций, которому соответствует одинаковая вероятность успеха. Каждая фирма будет принимать решение о старте разработки, если их потенциальная прибыль будет неотрицательна. При росте числа компаний, участвующих в разработке, можем заметить, что будет снижаться величина дохода каждой компании, поскольку потенциально возможная выручка со всего рынка будет делиться между большим числом компаний. Таким образом, в равновесии можно ожидать, что в разработках примут участие столько компаний, что ожидаемая прибыль каждой будет либо равной нулю, либо настолько положительной, что вход еще одной компании приведет к убыткам у всех.

- 2) Когда власти принимают решение, они берут в расчет совокупные потенциальные доходы и издержки компаний. Поэтому они учитывают, что вход новой компании отрицательно влияет на потенциальные доходы других компаний. Так, при росте числа компаний, например, в два раза, происходит рост затрат на исследования тоже в два раза, но вероятность успеха, определяющая совокупный доход всех компаний, растет медленнее. Таким образом, в этом случае число компаний будет регулироваться и не будет происходить избыточного входа, как в случае 1).

**Обоснование числа компаний в каждом случае – 5 баллов.**

**Задача 4. Максимум 15 баллов**

Треjder продает акции. Известно, что акции продаются один раз в месяц кроме лета, когда трейдер отдыхает. После экономического анализа и внесения результатов прошедшего года в таблицу по месяцам, выяснилось, что количества проданных акций отвечает магическому квадрату 3\*3. При этом числа в квадрате уникальны, образуют последовательность с разницей в единицу. Одно из чисел равно 31, сумма по строкам, столбцам и двум диагоналям квадрата 102.

Сентябрь	Декабрь	Март
Октябрь	Январь	Апрель
Ноябрь	Февраль	Май

Найдите какое количество акций продавалось каждый месяц и заполните числами ячейки данного квадрата.

**Решение:**

Просуммируем три строки в квадрате, тогда эта сумма очевидно равна 306. С другой стороны, поскольку числа в квадрате образуют последовательность с разницей в единицу, то воспользовавшись арифметической прогрессией, где первый член – это минимальное число в квадрате (назовем его  $a$ ), а максимальный элемент квадрата тогда  $a + 8$ .

$$\frac{a+(a+8)}{2} \cdot 9 = 306$$

Тогда  $a = 30$ , элементы квадрата от 30 до 38, которые можно расставить, например таким образом:

$$\begin{array}{ccc} 37 & 32 & 33 \\ 30 & 34 & 38 \\ 35 & 36 & 31 \end{array}$$

**Критерии:**

Нахождение всех чисел: 5 баллов

Пример правильного расставления в квадрате: 10 баллов

### Задача 5. Максимум 15 баллов

Прадедущка-банкир оставил новорожденному правнуку наследство. По условию договора с банком сумма на счету правнука увеличивается. Каждый год, на следующий после дня рождения день, к текущей сумме добавляется на 1 миллион рублей больше, чем в предыдущий год. Таким образом если изначально на счету был ноль рублей, через год + 1 миллион рублей, через 2 года 1 + 2 миллиона, через 3 года 1 + 2 + 3 и т. д. По условиям договора процесс остановится, и правнук получит деньги тогда, когда сумма на счету окажется трехзначным числом, состоящим из трех одинаковых цифр.

Сколько лет исполнится правнуку, когда условия договора будут выполнены?

#### Решение:

Так как число состоит из одинаковых цифр, его можно представить в виде  $111$  умножить на  $a$ . Согласно условию задачи, такое же число должно получаться как сумма арифметической прогрессии. Первый элемент прогрессии  $1$ , последний  $n$  и число элементов в прогрессии, тогда так как  $111 = 3 * 37$ :

$$n(n + 1) = 2 * 3 * 37 * a$$

Так как  $37$  это простое число, а  $n(n + 1) / 2$  должно быть меньше  $1000$ , тогда либо  $n + 1 = 37$ , либо  $n = 37$ . Проверкой убеждаемся, что  $n = 36$ , а необходимое трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр это  $666$ .

#### Критерии:

Верное составленное уравнение в целых числах: 5 баллов;

Верный ответ: 5 баллов;

Анализ уравнения и доказательство отсутствия других вариантов: 5 баллов.

### Задача 6. Максимум 20 баллов

Светлана уверена, что любой представитель кошачьих может быть интересен ей для двух целей – ловли мышей и проведения кототерапии. Исходя из этих соображений, Светлана приняла решение приобрести 2 котят, каждый из которых с равной вероятностью может оказаться либо самцом, либо самкой. Недельная кривая производственных возможностей самцов имеет вид  $M=64-K^2$ , а самок  $M=40-2K$ , где  $M$  – количество пойманных мышей за неделю, а  $K$  – количество часов, посвященных кототерапии.

(а) Определите, чему равно максимальное количество мышей, которые могли бы поймать 2 котенка за неделю при оптимальной для этой цели комбинации самцов и самок.

(б) Определите, какое количество различных вариантов совместной кривой производственных возможностей есть у Светланы при приобретении 2 котят.

(в) Определите аналитический и графический вид совместной кривой производственных возможностей 2 котят для каждой из возможных комбинаций самцов и самок.

(г) По итогу продавец котят доставил заказ, состоящий из самца и самки, но вместе с тем заметил, что у самца есть брат близнец, которого Светлана может бесплатно получить в свои добрые руки. Определите аналитический и графический вид совместной кривой производственных возможностей, если Светлана согласится на предложение принять третьего котёнка.

**Решение:**

1. Самец лучше ловит мышей, чем самка. Один самец способен поймать 64 мыши, самка – 40. Максимальное количество мышей, которое могли бы поймать 2 котенка за неделю –  $64 \cdot 2 = 128$ .

**Ответ:** 128 (1 балл)

2. Существует 3 различных варианта совместной КПВ: два самца, две самки, самка и самец.

**Ответ:** 3 (1 балл)

3. Две самки с КПВ  $M = 40 - 2K$ . КПВ линейны с одинаковыми альтернативными издержками. Складывая индивидуальные КПВ, получаем, что КПВ двух самок:  $M = 80 - 2K$ ,  $K \leq 40$ .

**Ответ:**  $M = 80 - 2K$ ,  $K \leq 40$ . (1 балла)

Два самца с КПВ  $M = 64 - K^2$ . КПВ имеют монотонно возрастающие альтернативные издержки, которые совпадают при каждом  $K_1 = K_2$ . Чтобы получить максимальное количество  $M$  для каждого значения  $K$ , выбирать  $K_1 = K_2 = 0.5K$ . Совместная КПВ двух самцов будет иметь вид:

$$M = 64 - K_1^2 + 64 - K_2^2 = 128 - 0.25K^2 - 0.25K^2 = 128 - 0.5K^2$$

**Ответ:**  $M = 128 - 0.5K^2$ ,  $K \leq 16$  (3 балла)

Самец с КПВ  $M = 64 - K^2$  и самка с КПВ  $M = 40 - 2K$ . Альтернативные издержки самца  $AI = 2K_1$ , а самки  $AI = 2$ . Получаем, что

$$K \leq 1: K_1 = K, K_2 = 0;$$

$$1 < K \leq 21: K_1 = 1, K_2 = K - 1;$$

$$21 < K \leq 28: K_1 = K - 20, K_2 = 20.$$

Подставляя данные значения в функцию  $M = M_1 + M_2 = 64 - K_1^2 + 40 - 2K_2$ , получаем совместную КПВ самца и самки:

$$M = 104 - K^2, K \leq 1$$

$$M = 105 - 2K, 1 < K \leq 21$$

$$M = 40K - K^2 - 336, 21 < K \leq 28$$

**Ответ:**  $M = 104 - K^2, K \leq 1$

$$M = 105 - 2K, 1 < K \leq 21$$

$$M = 40K - K^2 - 336, 21 < K \leq 28 \text{ (5 баллов)}$$

4. Задача сводится к поиску совместной КПВ для трех индивидуальных функций:

$$M = 40 - 2K, M = 64 - K^2, M = 64 - K^2. \text{ Очевидно, что задачу можно упростить, сложив}$$

совместную КПВ двух самцов из прошлого пункта  $M = 128 - 0.5K^2$  с КПВ одной самки.

Самцы с КПВ  $M = 128 - 0.5K^2$  и самка с КПВ  $M = 40 - 2K$ . Альтернативные издержки самцов  $AI = K_1$ , самки — 2. Получаем, что:

$$K \leq 2: K_1 = K, K_2 = 0$$

$$2 < K \leq 22: K_1 = 2, K_2 = K - 2$$

$$22 < K \leq 36: K_1 = K - 20, K_2 = 20.$$

Подставляя данные значения в функцию  $M = 128 - 0.5K_1^2 + 40 - 2K_2$ , получаем совместную КПВ самца и самки:

$$M = 168 - 0.5K^2, K \leq 2$$

$$M = 170 - 2K, 2 < K \leq 22$$

$$M = 20K - 0.5K^2 - 72, 22 < K \leq 36$$

**Ответ:**  $M = 168 - 0.5K^2, K \leq 2$  (3 балла)

$$M = 170 - 2K, 2 < K \leq 22 \text{ (3 балла)}$$

$$M = 20K - 0.5K^2 - 72, 22 < K \leq 36 \text{ (3 балла)}.$$

Арифметические ошибки, которые не привели к искажению смысла задачи — штраф 2 балла.

### **Задача 7. Максимум 15 баллов**

Некоторые производители товаров люкс-сегмента создают искусственный дефицит на свои товары. В частности, так поступают некоторые бренды швейцарских часов. Обладая достаточными трудовыми и капитальными ресурсами, они производят часы в меньшем количестве, чем готовы приобрести потребители при некоторой цене. Например, потребители готовы приобрести при цене 15 000 денежных единиц 3 000 экземпляров часов, а фирма производит и продает только 200 экземпляров.

**(а)** Объясните, почему некоторые фирмы могут придерживаться подобной стратегии, ежегодно отказываясь от части прибыли, которую они могут гарантированно получить.

Даже если подобные часы есть в наличии, потребитель, готовый купить их, может столкнуться с тем, что сотрудники компании будут настаивать на проведении собеседования с покупателем перед осуществлением продажи часов. Например, сотрудники компании могут поинтересоваться опытом взаимодействия покупателя с товарами этой фирмы, и, если окажется, что покупатель не имеет истории покупок часов этой компании, то ему могут отказать в приобретении часов.

**(б)** Объясните, почему некоторые фирмы могут придерживаться подобной стратегии. Какие у данной стратегии есть преимущества? Какие у данной стратегии есть недостатки?

### **Решение:**

Фирмы могут создавать искусственный дефицит на товары роскоши, что позволяет продавать подобные товары с высокой добавленной стоимостью в будущем. Если продать всем желающим часы сегодня по текущей цене, то есть вероятность, что в следующем периоде люди не будут готовы также охотно платить относительно высокую цену за товары этой фирмы. Искусственный дефицит делает товар более редким, что в свою очередь повышает имидж производителя и позволяет формировать добавленную стоимость. (5 баллов)

Принимаются и другие разумные идеи.

**(b)** Преимущества — более тщательно выбирать клиентов, что препятствует возникновению вторичного рынка и сохраняет рыночную власть фирмы (5 баллов), позволяет клиентам почувствовать себя участниками уникального сообщества (5 баллов). Недостатки — повышает транзакционные издержки для клиентов (5 баллов).

За пункт **(b)** не более 10 баллов. Принимаются и другие разумные идеи.