

**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,  
профиль «Инженерные науки»,  
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса  
2022-2023 учебного года, 10 класс**

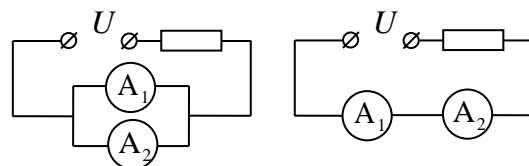
1. Решить уравнение  $x^4 - 2[x] = 15$ . Здесь  $[x]$  – целая часть числа  $x$  – наибольшее целое число не превосходящее  $x$ .

2. Сколько существует различных несократимых дробей вида  $\frac{n}{m}$ , десятичная запись которых представляется периодической дробью вида  $0, b\overline{8(a_1 a_2)}$ , где  $a_1, a_2, b$  – цифры?

3. Длины сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  равны 2, 3 и 4 соответственно. Точки  $M$  и  $N$  расположены на сторонах  $AB$  и  $AC$  на расстоянии 2 от вершин  $B$  и  $C$  соответственно. Точки  $P$  и  $Q$  находятся на продолжении сторон  $AC$  и  $BC$  за вершину  $C$  на расстоянии 4 от вершин  $A$  и  $B$ . Найти отношение длин отрезков  $PQ$  и  $MN$ .

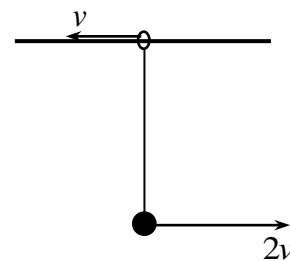
4. Собственный объем сыпучего материала – щебня, песка, крупы – можно измерить следующим образом. Сыпучий материал помещают в цилиндрический сосуд и герметично закрывают подвижным поршнем. Затем измеряют давления газа  $p_1$  и  $p_2$  в сосуде при двух различных значениях объема сосуда под поршнем –  $V_1$  и  $V_2$  и неизменной температуре. Найти по этим данным собственный объем сыпучего материала.

5. К источнику напряжения  $U$  подключили резистор с неизвестным сопротивлением и параллельно друг другу два амперметра  $A_1$  и  $A_2$  (см. левый рисунок). В этом случае амперметры показывают силу тока  $I_1 = 2$  А и  $I_2 = 3$  А.



Затем эти амперметры вместе с тем же резистором соединяют последовательно и подключают к источнику (правый рисунок). При этом амперметр  $A_1$  показывает силу тока  $I'_1 = 4$  А. Какой ток будет течь в цепи из тех же источника и резистора?

6. К концам невесомого нерастяжимого стержня прикреплены маленькое тело и массивное кольцо одинаковых масс. Кольцо может без трения двигаться по горизонтальной жесткой спице в поле силы тяжести (см. рисунок). В некоторый момент кольцу и телу сообщили скорости  $v$  и  $2v$ , направленные горизонтально вдоль стержня и противоположно друг другу (см. рисунок). Известно, что когда тело понижается на максимальную высоту, стержень составляет угол  $\alpha$  со спицей. Найти длину стержня. Спица очень длинная.

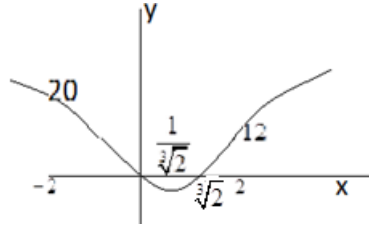


## Решения и критерии оценивания

1. Покажем, что уравнение не имеет решений для  $x \leq -2$  и  $x \geq 3$ . Действительно, пусть  $\{x\} = x - [x]$  – дробная часть числа  $x$ ,  $0 \leq \{x\} < 1$ . Перепишем уравнение в виде  $x^4 - 2x + 2\{x\} = 15$ . Отсюда получаем

$$13 < x^4 - 2x \leq 15 \quad (*).$$

График функции  $f(x) = x^4 - 2x$  изображен на рис



При  $x \leq -2$  выражение  $x^4 - 2x$  принимает значение больше 20 и неравенству (\*) не удовлетворяют. Аналогично, при  $x \geq 3$  выражение  $x^4 - 2x$  не меньше 75 и неравенство (\*) не выполнено. Таким образом, возможные значения для  $[x]$  равны  $-2, -1, 0, 1, 2$ .

Случай 1.  $[x] = -2 \rightarrow x^4 = 11 \rightarrow x_1 = -\sqrt[4]{11}, [x_1] = -2$ .

Случай 2.  $[x] = -1 \rightarrow x^4 = 13 \rightarrow x_2 = \pm\sqrt[4]{13}, [x_2] \neq -1, \emptyset$ .

Случай 3.  $[x] = 0 \rightarrow x^4 = 15 \rightarrow x_3 = \pm\sqrt[4]{15}, [x_3] \neq 0, \emptyset$ .

Случай 4.  $[x] = 1 \rightarrow x^4 = 17 \rightarrow x_4 = \pm\sqrt[4]{17}, [x_4] \neq 1, \emptyset$ .

Случай 5.  $[x] = 2 \rightarrow x^4 = 19 \rightarrow x_5 = \sqrt[4]{19}, [x_5] = 2$ .

Таким образом, решением задачи являются  $x = -\sqrt[4]{11}, x = \sqrt[4]{19}$ .

### Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- |  |           |
|--|-----------|
| 1. Умеет работать с функциями $\{x\}$ и $[x]$                                    | 0,5 балла |
| 2. Получена оценка значений $x$ при которых нет решений                          | 1 балл    |
| 3. Арифметическая ошибка при рассмотрении $[x]$ из множества $-2, -1, 0, 1, 2$ . | 1,5 балла |
| 4. Решена верно  | 2 балла   |

2. Запишем условие задачи  $\frac{n}{m} = 0, b8(a_1 a_2)$ . Перепишем уравнение в виде

$$100 \cdot \frac{n}{m} = b8 + 0, (a_1 a_2) = b8 + \frac{a_1 a_2}{99}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{n}{m} = \frac{(10b + 8) \cdot 99 + 10a_1 + a_2}{9900}.$$

Знаменатель дроби разлагается на простые множители  $9900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$ . Число  $(10b + 8) \cdot 99$  делится на 2, 3, 11 и имеет при делении на 5 остаток 2 при любых  $b = 0, 1, \dots, 9$ . Тогда для не сократимости дроби  $\frac{m}{n}$ , число  $a = 10a_1 + a_2$  не должно делиться на 2, 3, 11, а при делении на 5 не давать в остатке 3 (в противном случае дробь сократима на 5). Таким образом, допустимыми значениями для  $a_2$  являются цифры 1, 5, 7, 9 при этом  $a_1$  должно удовлетворять условиям: 1)  $a_1 + a_2$  не кратно 3 (нет делимости на 3); 2)  $a_1 \neq a_2$  (нет делимости на 11).

Случай  $a_2 = 1$ . Допустимой для этого случая цифрой  $a_1$  является 0, 3, 4, 6, 7, 9 (6 вариантов).

Случай  $a_2 = 5$ . Допустимой для этого случая цифрой  $a_1$  является 0, 2, 3, 6, 8, 9 (6 вариантов).

Случай  $a_2 = 7$ . Допустимой для этого случая цифрой  $a_1$  является 0,1,3,4,6,9 (6 вариантов).

Случай  $a_2 = 9$ . Допустимой для этого случая цифрой  $a_1$  является 1,2,4,5,7,8 (6 вариантов).

Таким образом, для каждого из 10 допустимых значений  $b$  возможны 24 варианта числа  $a = 10a_1 + a_2$ . Всего 240 дробей

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- |   |           |
|---|-----------|
| 1. Получил выражение для дроби  | 0,5 балла |
| 2. Есть продвижения в исследовании несократимости дроби   | 1 балл    |
| 3. Арифметическая ошибка при подсчете количества несократимых дробей, удовлетворяющих условиям задачи | 1,5 балла |
| 4. Решена верно   | 2 балла   |

3. Пусть  $a = 2, b = 3, c = 4$  длины сторон  $BC, AC$  и  $AB$  треугольника соответственно. Из условий задачи вытекает векторное равенство:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{c}{a} \cdot \overrightarrow{CN} + \frac{c}{a} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{c}{a} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c}{a} \cdot (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{c}{a} \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Таким образом, отрезки  $PQ$  и  $MN$  параллельны и их длины относятся как  $c : a = 4 : 2 = 2$ .

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- |   |           |
|---|-----------|
| 1. Верный чертёж, есть продвижение в решении задачи                   | 0,5 балла |
| 2. Получено векторное равенство или верно применена теорема косинусов | 1 балл    |
| 3. Арифметическая ошибка  | 1,5 балла |
| 4. Решена верно   | 2 балла   |

4. Поскольку объем воздуха в сосуде равен объему цилиндра  $V_1$  минус собственный объем  $v$  сыпучего материала, закон Клапейрона-Менделеева для воздуха в сосуде в первом случае дает

$$p_1(V_1 - v) = \nu RT$$

где  $\nu$  - количество вещества воздуха в сосуде,  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $T$  - абсолютная температура. Аналогично во втором случае

$$p_2(V_2 - v) = \nu RT$$

Деля эти уравнения друг на друга, находим

$$v = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{p_1 - p_2}$$

Рассмотренное решение имеет смысл, если при  $p_1 > p_2$ ,  $p_1 V_1 > p_2 V_2$  и наоборот.

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Правильная идея решения – использование закона Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла
  2. Правильный закон Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла
  3. Правильный закон Клапейрона-Менделеева для начального и конечного состояний (с исключением собственного объема сыпучего материала) – 0,5 балла
  4. Правильный ответ – 0,5 балла
- Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Очевидно, амперметры имеют разные сопротивления, поскольку при параллельном включении в цепь через них текут разные токи. Из закона Ома для амперметров следует, что отношение их сопротивлений равно

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Поскольку ток, текущий через источник в первом случае равен  $I_1 + I_2$ , закон Ома для участка цепи в первом случае дает

$$r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U}{I_1 + I_2}$$

или с использованием (1)

$$r + \frac{3}{5} R_2 = \frac{U}{I_1 + I_2} \quad (2)$$

Во втором случае ток через оба амперметра и источник будут одинаковыми (последовательное соединение элементов). Поэтому

$$I'_2 = I'_1 = 4 \text{ А}$$

Закон Ома для второго случая дает

$$r + R_1 + R_2 = \frac{U}{I'_1}$$

или с использованием (1)

$$r + \frac{5}{2} R_2 = \frac{U}{I'_1} \quad (3)$$

Исключая из системы уравнений (2)-(3) сопротивление второго амперметра, получим

$$r = \frac{U [25I'_1 - 6(I_1 + I_2)]}{19I'_1(I_1 + I_2)}$$

Отсюда находим ток в цепи, если источник замкнут на резистор

$$I = \frac{U}{r} = \frac{19I'_1(I_1 + I_2)}{25I'_1 - 6(I_1 + I_2)} = 12,7 \text{ А}$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

**1. Правильное отношение сопротивлений амперметров – 0,5 балла**

**2. Правильный закон Ома в первом случае – 0,5 балла**

**3. Правильный закон Ома во втором случае – 0,5 балла**

**4. Правильный ответ – 0,5 балла**

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

6. В момент подъема на максимальную высоту тело движется горизонтально. Поэтому из условия нерастяжимости стержня заключаем, точно такая же скорость (их проекции на направление стержня должны быть одинаковы, а скорости тела и кольца в момент подъема тела на

максимальную высоту направлены одинаково). Из закона сохранения импульса на горизонтальное направление имеем

$$2mv - mv = 2mv_1$$

где  $v_1$  - скорости тела и кольца в момент подъема тела на максимальную высоту. Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{2}$$

Теперь по закону сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} = 2 \frac{mv_1^2}{2} + mgl(1 - \sin \alpha)$$

где  $l$  - длина стержня. Отсюда находим

$$l = \frac{9v^2}{4g(1 - \sin \alpha)}$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- 1. Утверждение (с обоснованием из условия нерастяжимости стержня и того факта, что скорость тела в момент подъема тела на максимальную высоту горизонтальна), что скорости тела и кольца в этот момент одинаковы – 0,5 балла**
- 2. Правильно найдена скорость тела и кольца в момент подъема на максимальную высоту (из закона сохранения импульса) – 0,5 балла**
- 3. Правильный закон сохранения энергии для момента подъема тела на максимальную высоту – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ – 0,5 балла**

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

**Оценка работы участника**

**Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществляется согласно таблице:**