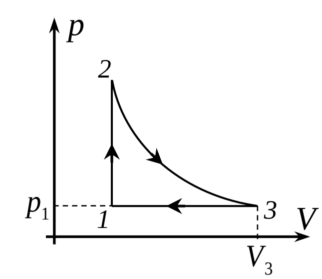
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2022-2023 учебного года, 11 класс

1. Решить уравнение $\log_x 2+\log_{x+2} 2+\log_{x+3} 2=\dfrac{1}{\log_2 x+\log_2(x+2)+\log_2(x+3)}$.

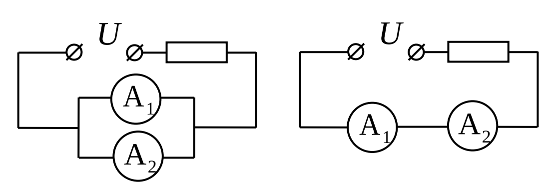
2. Петя решил спросить совет у своих друзей Миши и Маши приобретать ему собаку или нет. Вероятность того, что Миша скажет «да» равна $0,6$, Маша – $0,4$. Если советы друзей совпадут, Петя им последует. Если нет, то Петя доверится совету Миши с вероятность $0,8$. С какой вероятностью в доме Пети появится собака, если все советы даются друзьями только в форме «да» или «нет»?

3. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Все боковые грани пирамиды равнонаклонные к основанию. Сфера радиуса 1 с центром на основании пирамиды касается сторон треугольника ABC и двух боковых ребер DA и DC. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

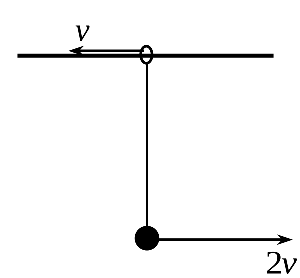
4. С одноатомным идеальным газом проходит следующий циклический процесс: 1-2 изохорическое нагревание, 2-3 – изотермическое расширение, 3-1 – изобарическое сжатие (см. график процесса в координатах «давление-объем»). Для этого процесса известны: давление газа в состоянии 1 - p_1, объем газа в состоянии 3 - V_3 (показаны на рисунке) и количество теплоты, которое газ получил в процессе 1-2 - Q. Найти давление и объем газа в состоянии 2.



5. К источнику электрического напряжения U подключили резистор с неизвестным сопротивлением и параллельно друг другу два амперметра A_1 и A_2 (см. левый рисунок). В этом случае амперметры показывают силу тока $I_1=2$ А и $I_2=3$ А. Затем эти амперметры вместе с тем же резистором соединяют последовательно и подключают к источнику (правый рисунок). При этом амперметр A_1 показывает силу тока $I_1'=4$ А. Какой ток будет течь в цепи из тех же источника и резистора, но без амперметров?



6. К концам невесомого нерастяжимого стержня прикреплены маленькое тело и массивное кольцо одинаковых масс. Кольцо может без трения двигаться по горизонтальной жесткой спице в поле силы тяжести (см. рисунок). В некоторый момент кольцу и телу сообщили скорости v и $2v$, направленные горизонтально вдоль стержня и противоположно друг другу (см. рисунок). Известно, что когда тело понимается на максимальную высоту, стержень составляет угол α со спицей. Найти длину стержня. Спица очень длинная.



Решения и критерии оценивания

1. Введем обозначения: $a=\log_2 x, b=\log_2(x+2), c=\log_2(x+3)$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{b+c}{a(a+b+c)}+\frac{b+c}{bc}=0 \leftrightarrow (b+c)\cdot\frac{bc+a(a+b+c)}{abc\left(a+b+c\right)}=0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (b+c)\cdot\frac{a^2+(b+c)a+bc}{abc\left(a+b+c\right)}=\frac{(b+c)(a+b)(a+c)}{abc\left(a+b+c\right)}=0.$$

Случай 1. $b+c=0, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$$\begin{cases}\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=0\\ x>0, x\neq 1\end{cases} \to (x+2)(x+3)=1 \to \varnothing$$

Случай 2. $a+b=0, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2(x+2)=0\\ x>0, x\neq 1\end{cases} \to x(x+2)=1 \to x=-1+\sqrt{2}$$

Случай 3. $a+c=0, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2(x+3)=0\\ x>0, x\neq 1\end{cases} \to x(x+3)=1 \to x=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

Таким образом, $x\in\left\{-1+\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right\}$.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Продемонстрировано знание свойств логарифмической функции, сделаны разумные преобразования левой и правой частей равенства	0,5 балла
2. Найдена часть решений или не отброшены посторонние корни корни	1 балл
3. Арифметическая ошибка	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

2. Пусть вероятность того, что Миша скажет «да» равна p_1, а вероятность того, что Маша скажет «да» равна p_2. Введем следующие события: событие A в доме Пети появится собака, событие H_1 Миша «да», Маша «да»; событие H_2 Миша «да», Маша «нет»; событие H_3 Миша «нет», Маша «да»; событие H_4 Миша «нет», Маша «нет». Событие A реализуется вместе с событиями H_1, H_2, H_3 и H_4. Найдем вероятности событий H_1, H_2, H_3 и H_4:

$$P(H_1)=p_1\cdot p_2,\ P(H_2)=p_1\cdot(1-p_2),\ P(H_3)=(1-p_1)\cdot p_2,\ P(H_4)=(1-p_1)\cdot(1-p)_2.$$

Кроме того, из условий задачи следует, что

$$P(A/H_1)=1,\ P(A/H_1)=q,\ P(H_3)=(1-p_1)\cdot p_2,\ P(A/H_3)=1-q,\ P(A/H_3)=1-q,\ P(A/H_1)=0.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=1}^{4}P(H_k)\cdot P(A/H_k)=p_1p_2+qp_1(1-p_2)+(1-q)p_2(1-p_1)=$$

$$=p_1p_2+qp_1-qp_1p_2+(1-q)p_2-(1-q)p_1p_2=q\cdot p_1+(1-q)p_2$$

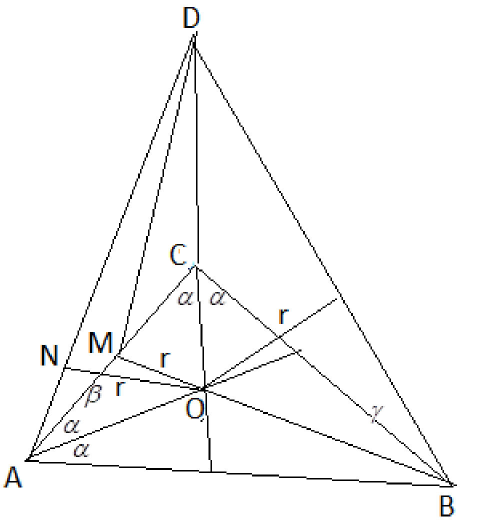
Так как по условию задачи $p_1=0,6,\ p_2=0,4,\ q=0,8$, то

$$P(A)=q\cdot p_1+(1-q)p_2=0,8\cdot 0,6+0,2\cdot 0,4=0,56.$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Применена формула произведения вероятностей	0,5 балла
2. Выделены благоприятные события и подсчитаны их вероятности	1 балл
3. Арифметическая ошибка при подсчете полной вероятности	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

Задача 3.



Введем обозначения: $r-$ радиус сферы с центром на основании пирамиды и касающейся сторон треугольника ABC и двух боковых ребер DA и DC; 2α – угол CAB, β – угол наклона бокового ребра AD к основанию; M – середина AC.

По условию задачи сечение сферы плоскостью основания пирамиды – окружность вписанная в треугольник ABC и ее радиус равен r. Пусть O – центр этой окружности, это точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Следовательно точка O лежит на медиане BM треугольника ABC, кроме того точка O является центром сферы, а отрезок DO является высотой пирамиды $ABCD$.

Выразим площадь треугольника ABC через r и α:

$$AM = rctg\alpha,\ AO = \frac{r}{\sin\alpha},\ MB = AM\cdot tg2\alpha = r\cdot ctg\alpha\cdot tg2\alpha.$$

Тогда $S_{ABC} = AM\cdot MB = r^2ctg^2\alpha\cdot tg2\alpha.$

Найдем высоту DO пирамиды $ABCD$. Заметим, что треугольники ANO и AMO равны (по катету и гипотенузе), поэтому угол $NAO = \alpha$. Имеем

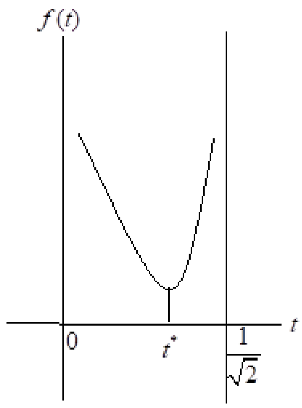
$$H = DO = AO\cdot tg\alpha = \frac{r}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Запишем формулу для объема пирамиды $ABCD$ через r и α:

$$V = \frac{1}{3}r^3ctg^2\alpha\cdot tg2\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r^3}{3}\cdot\frac{2\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2r^3}{3}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos2\alpha} =$$

$$= \frac{2r^3}{3}\cdot\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\right)}.$$

Введем обозначение: $t = \sin\alpha \in \left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда $\frac{3V}{2r^3} \equiv f(t) = \frac{1-t^2}{t(1-2t^2)}$. Таким образом, нам нужно исследовать функцию $f(t)$ на интервале $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ на экстремум.



Вычислим производную $f'(t)$:

$$f'(t)=\frac{-2t^2(1-2t^2)-(1-t^2)(1-6t^2)}{t^2(1-2t^2)^2}=-\frac{2t^4-5t^2+1}{t^2(1-2t^2)^2}$$

Найдем критические точки функции $f(t)$:

$$2t^4-5t^2+1=0.$$

Решая это биквадратное уравнение, находим следующие корни

$$t_1=-\frac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{4}<t_2=-\frac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{4}<\ t_3=\frac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{4}<t_4=\frac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{4}.$$

Из них только $t_3=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2}\in\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Заметим, что в точке $t=t^*$ функция принимает минимальное значение. Это следует из того, что

$$f'(t)=-\frac{2\left(t-t_1\right)\left(t-t_2\right)\left(t-t_3\right)\left(t-t_4\right)}{t^2(1-2t^2)^2}$$

при $t<t_3$ отрицательна, а при $t>t_3$ положительна. Вычислим $f(t_3)$:

$$f(t_3)=\left.\frac{1-t^2}{t(1-2t^2)}\right|_{t=t_3}=\frac{1-\dfrac{5-\sqrt{13}}{4}}{t_3\left(1-\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{5-\sqrt{13}}(\sqrt{13}-3)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{13}-1)(\sqrt{13}+3)}{4\sqrt{5-\sqrt{13}}}=\frac{5+\sqrt{13}}{2\sqrt{5-\sqrt{13}}}=\frac{\left(5+\sqrt{13}\right)^{3/2}}{4\sqrt{3}}.$$

Тогда $V_{\min}=\dfrac{2r^3}{3}\cdot f(t^*)=\dfrac{2r^3}{3}\cdot\dfrac{\left(5+\sqrt{13}\right)^{3/2}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{r^3}{2}\cdot\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}\right)^{3/2}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}\right)^{3/2}$.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Верный чертеж	0,5 балла
2. Найдена функция объема для исследования на экстремум	1 балл
3. Арифметическая ошибка при исследовании функции объема	1,5 балла
4. Решена верно	2 балла

4. Пусть давление и объем газа в состоянии 2 равны p и V. Поскольку количество теплоты, полученное газом в изохорическом процессе, равно изменению внутренней энергии газа в этом процессе, то

$$Q = \frac{3}{2}\left(\nu R T_2 - \nu R T_1\right)$$

где ν - количество вещества газа, R - универсальная газовая постоянная, T_2 и T_1 - температуры газа в состояниях 2 и 1. Используя закон Клапейрона-Менделеева, получим

$$Q = \frac{3}{2}\left(pV - p_1 V\right)$$

С другой стороны, по закону Бойля-Мариотта для изотермического процесса 2-3

$$pV = p_1 V_3 .$$

Поэтому

$$Q = \frac{3}{2}\left(p_1 V_3 - p_1 V\right)$$

Отсюда находим объем газа в состоянии 2 (он же – объем газа в состоянии 1):

$$V = V_3 - \frac{2Q}{3p_1} .$$

Теперь из закона Бойля-Мариотта находим давление газа в состоянии 2:

$$p = \frac{p_1 V_3}{V} = \frac{p_1 V_3}{V_3 - \dfrac{2Q}{3p_1}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное использование первого закона термодинамики для изохорического процесса – 0,5 балла
2. Правильное использование закона Клапейрона-Менделеева – 0,5 балла
3. Правильно найден объем газа в состояниях 2 и 1 – 0,5 балла
4. Правильно найдено давление газа в состоянии 2 – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Очевидно, амперметры имеют разные сопротивления, поскольку при параллельном включении в цепь через них текут разные токи. Из закона Ома для амперметров следует, что отношение их сопротивлений равно

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Поскольку ток, текущий через источник в первом случае равен $I_1 + I_2$, закон Ома для участка цепи в первом случае дает

$$r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U}{I_1 + I_2}$$

или с использованием (1)

$$r + \frac{3}{5} R_2 = \frac{U}{I_1 + I_2} \qquad (2)$$

Во втором случае ток через оба амперметра и источник будут одинаковыми (последовательное соединение элементов). Поэтому

$$I_2' = I_1' = 4 \text{ A}$$

Закон Ома для второго случая дает

$$r + R_1 + R_2 = \frac{U}{I_1'}$$

или с использованием (1)

$$r + \frac{5}{2} R_2 = \frac{U}{I_1'} \qquad (3)$$

Исключая из системы уравнений (2)-(3) сопротивление второго амперметра, получим

$$r = \frac{U\left[25 I_1' - 6\left(I_1 + I_2\right)\right]}{19 I_1'\left(I_1 + I_2\right)}$$

Отсюда находим ток в цепи, если источник замкнут на резистор

$$I = \frac{U}{r} = \frac{19 I_1'\left(I_1 + I_2\right)}{25 I_1' - 6\left(I_1 + I_2\right)} = 12{,}7 \text{ A}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное отношение сопротивлений амперметров – 0,5 балла
2. Правильный закон Ома в первом случае – 0,5 балла
3. Правильный закон Ома во втором случае – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. В момент подъема на максимальную высоту тело движется горизонтально. Поэтому из условия нерастяжимости стержня заключаем, точно такая же скорость (их проекции на направление стрежня должны быть одинаковы, а скорости тела и кольца в момент подъема тела на максимальную высоту направлены одинаково). Из закона сохранения импульса на горизонтальное направление имеем

$$2mv - mv = 2mv_1$$

где v_1 - скорости тела и кольца в момент подъема тела на максимальную высоту. Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{2}$$

Теперь по закону сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\left(2v\right)^2}{2} = 2\frac{mv_1^2}{2} + mgl\left(1 - \sin\alpha\right)$$

где l - длина стержня. Отсюда находим

$$l = \frac{9v^2}{4g\left(1 - \sin\alpha\right)}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Утверждение (с обоснованием из условия нерастяжимости стержня и того факта, что скорость тела в момент подъема тела на максимальную высоту горизонтальна), что скорости тела и кольца в этот момент одинаковы – 0,5 балла
2. Правильно найдена скорость тела и кольца в момент подъема на максимальную высоту (из закона сохранения импульса) – 0,5 балла
3. Правильный закон сохранения энергии для момента подъема тела на максимальную высоту – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице: