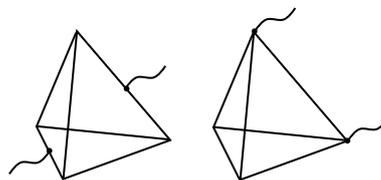


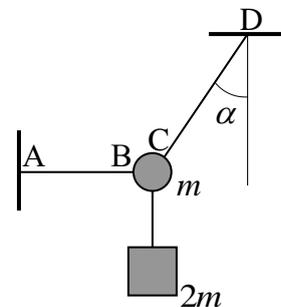
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,  
профиль «Инженерные науки»,  
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса  
2022-2023 учебного года, 9 класс**

1. При каких целых  $a$  уравнение  $x^2 - (a+12)x + 12a + 3 = 0$  имеет только целые корни?
2. Петя написал в десятичной форме целое число, начинающееся с цифр 2022 и при этом делящееся на 2023. Какое наименьшее число мог написать Петя?
3. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $BE$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Длина отрезка  $OE$  равна 1. Известно, что около четырехугольника  $OECD$  можно описать окружность. Найти радиус этой окружности.

4. Из шести одинаковых кусков проволоки изготовили пирамиду и включили в электрическую цепь серединами двух противоположных ребер (см. левый рисунок). Оказалось, что сопротивление пирамиды при таком подключении равно  $R$ . Каким будет сопротивление пирамиды, если включить ее в электрическую цепь за две вершины (см. правый рисунок)?



5. Два груза массами  $m$  и  $2m$  связаны тремя нитями так, как это показано на рисунке. При этом нить  $AB$  – горизонтальна, нить  $CD$  образует угол  $\alpha$  с вертикалью. Найти силы натяжения нитей  $AB$  и  $CD$ . Нить  $AB$  перерезают. Найти ускорения грузов сразу после этого. Нити малорастяжимы и невесомы.



6. Тело бросили с поверхности земли под некоторым углом к горизонту, Известно, что вектор скорости тела направлен под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту через время  $t_1$  и  $t_2$  после броска. Найти максимальную высоту подъема тела над землей и расстояние от точки бросания до точки падения тела на землю. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

## Решения и критерии оценивания

1. Перепишем уравнение в виде

$$a(12-x) + x^2 - 12x + 3 = 0$$

Число  $x = 12$  не может быть корнем этого уравнения. Разделим правую и левую части равенства на  $x - 12$ :

$$a = \frac{x^2 - 12x + 3}{x - 12} = x + \frac{3}{x - 12}$$

Поскольку  $a, x$  – целые, возможны 4 случая.

Случай 1.  $x - 12 = 1 \rightarrow x = 13 \rightarrow a = 16$ .

Случай 2.  $x - 12 = -1 \rightarrow x = 11 \rightarrow a = 8$ .

Случай 3.  $x - 12 = 3 \rightarrow x = 15 \rightarrow a = 16$ .

Случай 4.  $x - 12 = -3 \rightarrow x = 9 \rightarrow a = 8$ .

Таким образом, уравнение имеет только целые корни при  $a = 8, a = 16$ .

### Критерии оценки задачи 1 (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- |  |            |
|--|------------|
| 1. Верно записана формула Виета  | 0,5 балла  |
| 2. Получено выражение для параметра $a$ и это выражение записано в виде суммы целой и дробной частей | 1 балл     |
| 3. Арифметические ошибки при анализе дробной части   | 1,5 баллов |
| 4. Решена верно  | 2 балла    |

2. Все 200 написанных чисел можно представить в виде:

$$n - 199, n - 197, \dots, n - 1, n + 1, n + 3, \dots, n + 199,$$

где  $n$  некоторое четное число,  $n \geq 200$ .

Сумма  $S$  этих чисел равна  $200n$ . Она делится на 56, если  $n = 14k, k \geq 15$ . Наименьшее  $S$  соответствует  $k = 15$ . Тогда  $n = 14 \cdot 15 = 210$ , а  $S_{\min} = 200 \cdot 210 = 42000$ .

### Критерии оценки задачи 2 (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

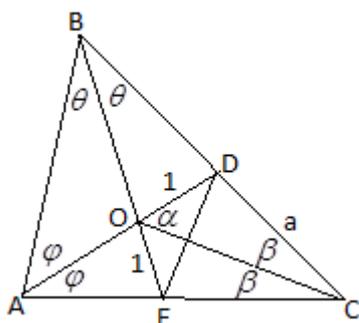
- |   |           |
|---|-----------|
| 1. Ответ получен подбором   | 0,5 балла |
| 2. Получено выражение для суммы $S$ чисел и найдены значения $n$ , при которых она делится на 56. | 1 балл    |
| 3. Арифметическая ошибка при вычислении минимального значения $S$                                 | 1,5 балла |
| 4. Решена верно   | 2 балла   |

3. Введем обозначения:  $\angle BAC = 2\varphi$ ,  $\angle ACB = 2\beta$ ,  $\angle ABC = 2\theta$ . Тогда  $\angle DOE = \angle AOB = 180^\circ - \varphi - \theta$ .

Так как около четырехугольника  $OECD$  можно описать окружность, то  $180^\circ - \varphi - \theta + 2\beta = 180^\circ$ .

Отсюда найдем  $2\beta = \varphi + \theta$ . Воспользуемся теоремой о том, что сумма углов в треугольнике равна  $180^\circ$ :  $2\varphi + 2\theta + 2\beta = 180^\circ$ . Отсюда получаем:  $6\beta = 180^\circ$  или  $\beta = 30^\circ$ . Применим теорему синусов

для треугольника  $OEC$ :  $\frac{OE}{\sin \beta} = 2R$ . С учетом того, что длина отрезка  $OE$  равна 1, находим  $R = 1$ .



**Критерии оценки задачи 3(максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- |  |           |
|--|-----------|
| 1. Построил чертеж, записал теоремы и свойства, необходимые для решения задачи | 0,5 балла |
| 2. Верно нашёл угол ACB  | 1 балла   |
| 3. Арифметическая ошибка   | 1,5 балла |
| 4. Решена верно  | 2 балла   |

4.. Из симметрии цепи, показанной на левом рисунке условия, следует, что в каждом разветвлении ток делится пополам. Поэтому, если в точку А втекает ток  $I$ , сопротивление одного ребра  $r$ , то напряжения на всех проводниках, составляющих ребра тетраэдра являются следующими:

$$U_{AB} = U_{AC} = Ir/4,$$

$$U_{CD} = U_{CE} = U_{BE} = U_{BD} = Ir/4, U_{DF} = U_{EF} = Ir/4.$$

Поэтому напряжение между точками А и F равно

$$U_{AF} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DF} = \frac{3Ir}{4}$$

Отсюда находим, что сопротивление пирамиды, включенной за середины противоположных ребер, равно  $3r/4$ . Отсюда находим сопротивление ребра

$$r = \frac{4R}{3} \quad (*)$$

Если включить пирамиду за две вершины (D и E на рисунке), то противоположное ребро (BC) можно удалить, поскольку ток по нему не течет (оба направления BC и CB эквивалентны, поэтому току некуда течь). В результате цепь сводится к трем параллельно соединенным резисторам  $r$ ,  $2r$  и  $2r$ . Поэтому ее сопротивление равно  $r/2$ . Поэтому из формулы (\*) получаем

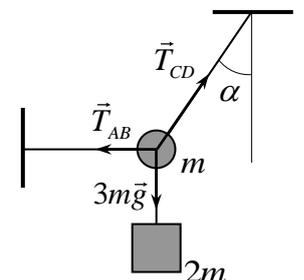
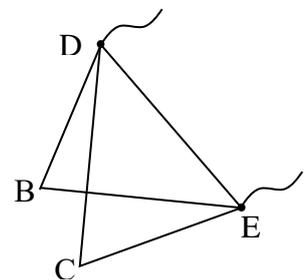
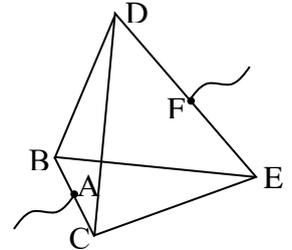
$$R_{DE} = \frac{2R}{3}$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Используются правильные формулы для токов, напряжений и сопротивлений при последовательном и параллельном соединении резисторов – 0,5 балла
2. Найдено сопротивление первой цепи и определено сопротивление одного ребра пирамиды – 0,5 балла
3. Выброшено (с обоснованием) ребро BC из второй цепи – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Найдем сначала силы, действующие во всех нитях в равновесии. На тело массы  $m$  действует сила тяжести  $m\vec{g}$  и три силы натяжения нитей  $\vec{T}_{AB}$ ,  $\vec{T}_{CD}$  и сила натяжения нижней нити, равная  $2m\vec{g}$  (см. рисунок). Поэтому условие равновесия этого тела в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления дает



$$T_{AB} = T_{CD} \sin \alpha$$

$$3mg = T_{CD} \cos \alpha$$

Из этих формул находим

$$T_{CD} = \frac{3mg}{\cos \alpha}, \quad T_{AB} = 3mg \operatorname{tg} \alpha$$

Сразу после перерезания нити АВ тело массой  $m$  начнет двигаться под действием двух сил -  $3m\vec{g}$ , направленной вертикально вниз, и  $\vec{T}_{CD}$ , направленной вдоль нити CD. При этом, поскольку скорость тела равна нулю, вектор его ускорения направлен перпендикулярно нити CD. А так как сила натяжения нижней нити сразу после перерезания нити АВ не успеет измениться (для изменения сил натяжения тела должны переместиться), то второй закон Ньютона для тела массой  $m$  в проекциях на направление, перпендикулярное нити CD, дает

$$ma_m = 3mg \sin \alpha$$

Отсюда получаем

$$a_m = 3g \sin \alpha$$

Из-за того, что сила натяжения нити, связывающей тела, не меняется, ускорение тела массой  $2m$  равно нулю

$$a_{2m} = 0$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

**1. Верно расставлены силы, действующие на тела – 0,5 балла**

**2. Верно определены силы натяжения – 0,5 балла**

**3. Утверждение, что сразу после перерезания силы не меняются – 0,5 балла**

**4. Правильные ответы для ускорений тел – 0,5 балла**

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

**6. Поскольку траектория тела симметрична относительно верхней точки, время подъема  $t_{\text{под}}$  тела на максимальную высоту лежит ровно посередине между моментами  $t_1$  и  $t_2$ :**

$$t_{\text{под}} = \frac{t_2 + t_1}{2}, \quad (1)$$

а полное время движения  $t_{\text{полн}}$  есть удвоенное время (1)

$$t_{\text{полн}} = t_2 + t_1, \quad (2)$$

Из формулы (1) и закона изменения скорости тела для равноускоренного движения, находим изменение вертикальной проекции скорости тела за время подъема на максимальную высоту:

$$0 = v_{0,y} - \frac{g(t_2 + t_1)}{2}$$

где  $v_{0,y}$  - проекция вектора начальной скорости на вертикальную ось. Отсюда находим вертикальную проекцию начальной скорости тела

$$v_{0,y} = \frac{g(t_2 + t_1)}{2}$$

Горизонтальную проекцию начальной скорости можно найти из следующих соображений. Поскольку от момента  $t_1$  до момента подъема на максимальную высоту (т.е. за время  $(t_2 - t_1)/2$ ) вертикальная проекция уменьшается до нуля, то, применяя закон движения для скорости к этому этапу движения, получим

$$0 = v_{1,y} - \frac{g(t_2 - t_1)}{2}$$

где  $v_{1,y}$  - вертикальная проекция вектора скорости тела в момент времени  $t_1$ . Поэтому

$$v_{1,y} = \frac{g(t_2 - t_1)}{2}$$

Поэтому горизонтальная проекция скорости тела в этот момент есть

$$v_{1,x} = v_{1,y} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{g(t_2 - t_1)}{2} \sqrt{3} = v_{0,x} \quad (3)$$

А поскольку горизонтальная составляющая скорости не меняется, то в процессе всего движения она будет (3). Отсюда и формулы (2) находим дальность полета  $S$

$$S = v_{0,x} t_{\text{полн}} = \frac{g(t_2 - t_1)}{2} \sqrt{3} (t_2 + t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} g (t_2^2 - t_1^2)$$

Максимальную высоту подъема  $h$  можно найти, зная вертикальную проекцию начальной скорости

$$h = \frac{v_{0,y}^2}{2g} = \frac{g(t_2 + t_1)^2}{8}$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- 1. Правильно найдены время подъема и полное время движения – 0,5 балла**
- 2. Правильно найдена горизонтальная составляющая скорости и вертикальная составляющая начальной скорости – 0,5 балла**
- 3. Правильно найдена максимальная высота подъема тела – 0,5 балла**
- 4. Правильно найдена дальность полета тела – 0,5 балла**

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

**Оценка работы участника**

**Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществляется согласно таблице:**