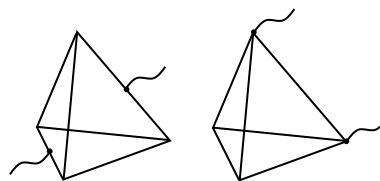


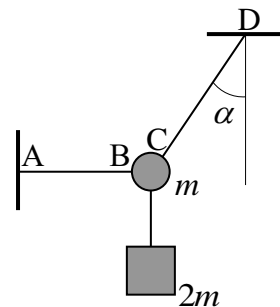
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2022-2023 учебного года, 9 класс**

1. При каких целых a уравнение $x^2 - (a+12)x + 12a + 3 = 0$ имеет только целые корни?
2. Петя написал в десятичной форме целое число, начинающееся с цифр 2022 и при этом делящееся на 2023. Какое наименьшее число мог написать Петя?
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE , пересекающиеся в точке O . Длина отрезка OE равна 1. Известно, что около четырехугольника $OECD$ можно описать окружность. Найти радиус этой окружности.

4. Из шести одинаковых кусков проволоки изготовили пирамиду и включили в электрическую цепь серединами двух противоположных ребер (см. левый рисунок). Оказалось, что сопротивление пирамиды при таком подключении равно R . Каким будет сопротивление пирамиды, если включить ее в электрическую цепь за две вершины (см. правый рисунок)?



5. Два груза массами m и $2m$ связаны тремя нитями так, как это показано на рисунке. При этом нить AB – горизонтальна, нить CD образует угол α с вертикалью. Найти силы натяжения нитей AB и CD . Нить AB перерезают. Найти ускорения грузов сразу после этого. Нити малорастяжимы и невесомы.



6. Тело бросили с поверхности земли под некоторым углом к горизонту, Известно, что вектор скорости тела направлен под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту через время t_1 и t_2 после броска. Найти максимальную высоту подъема тела над землей и расстояние от точки бросания до точки падения тела на землю. Ускорение свободного падения равно g . Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решения и критерии оценивания

1. Перепишем уравнение в виде

$$a(12-x) + x^2 - 12x + 3 = 0$$

Число $x = 12$ не может быть корнем этого уравнения. Разделим правую и левую части равенства на $x - 12$:

$$a = \frac{x^2 - 12x + 3}{x - 12} = x + \frac{3}{x - 12}$$

Поскольку a, x – целые, возможны 4 случая.

Случай 1. $x - 12 = 1 \rightarrow x = 13 \rightarrow a = 16$.

Случай 2. $x - 12 = -1 \rightarrow x = 11 \rightarrow a = 8$.

Случай 3. $x - 12 = 3 \rightarrow x = 15 \rightarrow a = 16$.

Случай 4. $x - 12 = -3 \rightarrow x = 9 \rightarrow a = 8$.

Таким образом, уравнение имеет только целые корни при $a = 8, a = 16$.

Критерии оценки задачи 1 (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- | | |
|--|------------|
| 1. Верно записана формула Виета | 0,5 балла |
| 2. Получено выражение для параметра a и это выражение записано в виде суммы целой и дробной частей | 1 балл |
| 3. Арифметические ошибки при анализе дробной части | 1,5 баллов |
| 4. Решена верно | 2 балла |

2. Все 200 написанных чисел можно представить в виде:

$$n - 199, n - 197, \dots, n - 1, n + 1, n + 3, \dots, n + 199,$$

где n некоторое четное число, $n \geq 200$.

Сумма S этих чисел равна $200n$. Она делится на 56, если $n = 14k, k \geq 15$. Наименьшее S соответствует $k = 15$. Тогда $n = 14 \cdot 15 = 210$, а $S_{\min} = 200 \cdot 210 = 42000$.

Критерии оценки задачи 2 (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

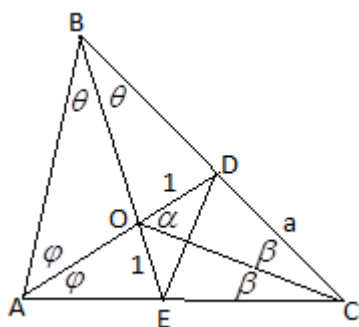
- | | |
|---|-----------|
| 1. Ответ получен подбором | 0,5 балла |
| 2. Получено выражение для суммы S чисел и найдены значения n , при которых она делится на 56. | 1 балл |
| 3. Арифметическая ошибка при вычислении минимального значения S | 1,5 балла |
| 4. Решена верно | 2 балла |

3. Введем обозначения: $\angle BAC = 2\varphi$, $\angle ACB = 2\beta$, $\angle ABC = 2\theta$. Тогда $\angle DOE = \angle AOB = 180^\circ - \varphi - \theta$.

Так как около четырехугольника $OECD$ можно описать окружность, то $180^\circ - \varphi - \theta + 2\beta = 180^\circ$.

Отсюда найдем $2\beta = \varphi + \theta$. Воспользуемся теоремой о том, что сумма углов в треугольнике равна 180° : $2\varphi + 2\theta + 2\beta = 180^\circ$. Отсюда получаем: $6\beta = 180^\circ$ или $\beta = 30^\circ$. Применим теорему синусов

для треугольника OEC : $\frac{OE}{\sin \beta} = 2R$. С учетом того, что длина отрезка OE равна 1, находим $R = 1$.



Критерии оценки задачи 3(максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- | | |
|--|-----------|
| 1. Построил чертеж, записал теоремы и свойства, необходимые для решения задачи | 0,5 балла |
| 2. Верно нашёл угол ACB | 1 балла |
| 3. Арифметическая ошибка | 1,5 балла |
| 4. Решена верно | 2 балла |

4.. Из симметрии цепи, показанной на левом рисунке условия, следует, что в каждом разветвлении ток делится пополам. Поэтому, если в точку A втекает ток I , сопротивление одного ребра r , то напряжения на всех проводниках, составляющих ребра тетраэдра являются следующими:

$$U_{AB} = U_{AC} = Ir/4,$$

$$U_{CD} = U_{CE} = U_{BE} = U_{BD} = Ir/4, U_{DF} = U_{EF} = Ir/4.$$

Поэтому напряжение между точками A и F равно

$$U_{AF} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DF} = \frac{3Ir}{4}$$

Отсюда находим, что сопротивление пирамиды, включенной за середины противоположных ребер, равно $3r/4$. Отсюда находим сопротивление ребра

$$r = \frac{4R}{3} \quad (*)$$

Если включить пирамиду за две вершины (D и E на рисунке), то противоположное ребро (BC) можно удалить, поскольку ток по нему не течет (оба направления BC и CB эквивалентны, поэтому току некуда течь). В результате цепь сводится к трем параллельно соединенным резисторам r , $2r$ и $2r$. Поэтому ее сопротивление равно $r/2$. Поэтому из формулы (*) получаем

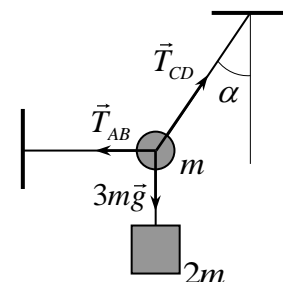
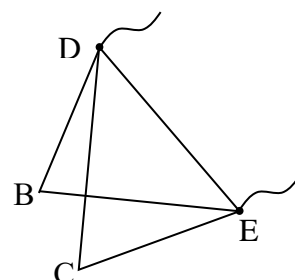
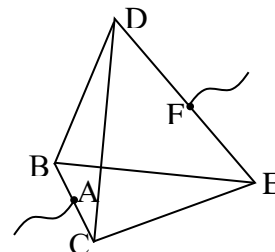
$$R_{DE} = \frac{2R}{3}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Используются правильные формулы для токов, напряжений и сопротивлений при последовательном и параллельном соединении резисторов – 0,5 балла
2. Найдено сопротивление первой цепи и определено сопротивление одного ребра пирамиды – 0,5 балла
3. Выброшено (с обоснованием) ребро BC из второй цепи – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Найдем сначала силы, действующие во всех нитях в равновесии. На тело массы m действует сила тяжести $m\vec{g}$ и три силы натяжения нитей \vec{T}_{AB} , \vec{T}_{CD} и сила натяжения нижней нити, равная $2m\vec{g}$ (см. рисунок). Поэтому условие равновесия этого тела в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления дает



$$T_{AB} = T_{CD} \sin \alpha$$

$$3mg = T_{CD} \cos \alpha$$

Из этих формул находим

$$T_{CD} = \frac{3mg}{\cos \alpha}, \quad T_{AB} = 3mg \operatorname{tg} \alpha$$

Сразу после перерезания нити АВ тело массой m начнет двигаться под действием двух сил - $3m\vec{g}$, направленной вертикально вниз, и \vec{T}_{CD} , направленной вдоль нити CD. При этом, поскольку скорость тела равна нулю, вектор его ускорения направлен перпендикулярно нити CD. А так как сила натяжения нижней нити сразу после перерезания нити АВ не успеет измениться (для изменения сил натяжения тела должны переместиться), то второй закон Ньютона для тела массой m в проекциях на направление, перпендикулярное нити CD, дает

$$ma_m = 3mg \sin \alpha$$

Отсюда получаем

$$a_m = 3g \sin \alpha$$

Из-за того, что сила натяжения нити, связывающей тела, не меняется, ускорение тела массой $2m$ равно нулю

$$a_{2m} = 0$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Верно расставлены силы, действующие на тела – 0,5 балла

2. Верно определены силы натяжения – 0,5 балла

3. Утверждение, что сразу после перерезания силы не меняются – 0,5 балла

4. Правильные ответы для ускорений тел – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. Поскольку траектория тела симметрична относительно верхней точки, время подъема $t_{\text{под}}$ тела на максимальную высоту лежит ровно посередине между моментами t_1 и t_2 :

$$t_{\text{под}} = \frac{t_2 + t_1}{2}, \quad (1)$$

а полное время движения $t_{\text{полн}}$ есть удвоенное время (1)

$$t_{\text{полн}} = t_2 + t_1, \quad (2)$$

Из формулы (1) и закона изменения скорости тела для равноускоренного движения, находим изменение вертикальной проекции скорости тела за время подъема на максимальную высоту:

$$0 = v_{0,y} - \frac{g(t_2 + t_1)}{2}$$

где $v_{0,y}$ - проекция вектора начальной скорости на вертикальную ось. Отсюда находим вертикальную проекцию начальной скорости тела

$$v_{0,y} = \frac{g(t_2 + t_1)}{2}$$

Горизонтальную проекцию начальной скорости можно найти из следующих соображений. Поскольку от момента t_1 до момента подъема на максимальную высоту (т.е. за время $(t_2 - t_1)/2$) вертикальная проекция уменьшается до нуля, то, применяя закон движения для скорости к этому этапу движения, получим

$$0 = v_{1,y} - \frac{g(t_2 - t_1)}{2}$$

где $v_{1,y}$ - вертикальная проекция вектора скорости тела в момент времени t_1 . Поэтому

$$v_{1,y} = \frac{g(t_2 - t_1)}{2}$$

Поэтому горизонтальная проекция скорости тела в этот момент есть

$$v_{1,x} = v_{1,y} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{g(t_2 - t_1)}{2} \sqrt{3} = v_{0,x} \quad (3)$$

А поскольку горизонтальная составляющая скорости не меняется, то в процессе всего движения она будет (3). Отсюда и формулы (2) находим дальность полета S

$$S = v_{0,x} t_{\text{полн}} = \frac{g(t_2 - t_1)}{2} \sqrt{3} (t_2 + t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} g (t_2^2 - t_1^2)$$

Максимальную высоту подъема h можно найти, зная вертикальную проекцию начальной скорости

$$h = \frac{v_{0,y}^2}{2g} = \frac{g(t_2 + t_1)^2}{8}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- 1. Правильно найдены время подъема и полное время движения – 0,5 балла**
- 2. Правильно найдена горизонтальная составляющая скорости и вертикальная составляющая начальной скорости – 0,5 балла**
- 3. Правильно найдена максимальная высота подъема тела – 0,5 балла**
- 4. Правильно найдена дальность полета тела – 0,5 балла**

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника

Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществляется согласно таблице: