Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 1.

1. Петя просматривал календарь 21 века, начиная с 2001 года и заканчивая 2100 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 21 веке?

2. Найти все y, для которых уравнение $\sin y\cdot(x-\sin y)^2+\cos y\cdot(x-cosy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ ΔBCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=30^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 2.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть a – частное от деления n на 100, b – остаток от деления n на 100. Тогда $n=100a+b$. Последний год века «счастливый»: $a=21, b=0$. Для всех остальных n частное $a=20$, а остаток $b\in[1;99]$. По условию, год счастливый, если $(b+2000)\colon(b+20)$, тогда $\frac{b+2000}{b+20}=\frac{b+20}{b+20}+\frac{1980}{b+20}$. Таким образом, число $b+20\geq 21$ должно быть делителем числа $1980=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11$. Найдём число делителей этого числа. Всего число 1980 имеет $(2+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=36$ делителей, среди которых 13 (1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,15,18,20) меньше 21. Поэтому каждому из 36-13=23 делителей соответствует свое $b\geq1$ и свой номер «счастливого» года.

Ответ: 24 года.

Задача 2. Пусть $a=\sin y, b=\cos y$. Запишем исходное уравнение в виде
$b\cdot(x-a)^2+a\cdot(x-b)^2=0$, тогда $(a+b)\cdot x^2-2(a^2+b^2)\cdot x+a^3+b^3=0$.
Получим квадратное уравнение, если $(a+b)\neq 0$. И линейное уравнение, если $(a+b)=0$.
Если уравнение линейное, то получим единственное решение при условии $a+b=0, a\neq 0$.

Откуда $siny+cosy=0$. Тогда $tgy=-1\rightarrow y=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$.

Если уравнение квадратное, то единственное решение получим, при условии $a+b\neq 0, D/4=0$.
$\frac{D}{4}=(a^2+b^2)^2-(a^3+b^3)\cdot(a+b)=-ab(a-b)^2=0$. Значит, $a=0$ или $b=0$, или $a=b$.

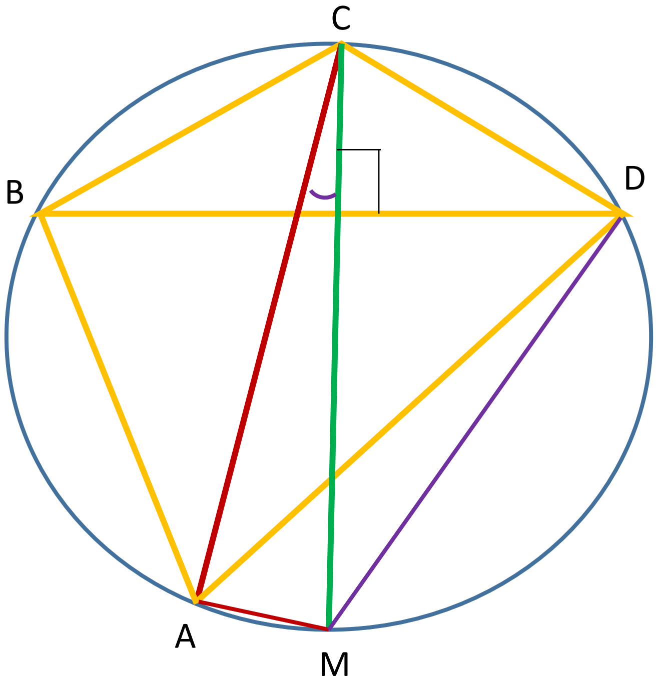
$$a=0, b\neq 0, siny=0, y=\pi m, m\in Z.$$
$$b=0, a\neq 0, cosy=0, y=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

$a=b,\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ siny=cosy,\ y=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

Объединяя все варианты, приходим к выводу, что при $y=\dfrac{\pi k}{4}, k\in Z$ уравнение имеет единственное решение.

Ответ: $y=\dfrac{\pi k}{4}, k\in Z$.

Задача 3. По условию задачи ΔBCD и ΔBAD вписаны в окружность, значит четырёхугольник $ABCD$ также вписан в окружность. По свойству углов вписанного четырёхугольника $\angle BCD = 150^0$, так как $\angle BAD = 30^0$.



Дополнительное построение: проведём диаметр $CM = d$ $(CM \perp BD)$.

ΔMCD – прямоугольный (опирается на диаметр), $cos\angle DCM = \frac{CD}{d} = \frac{CB}{d}$.

ΔBCD – равнобедренный, значит CM делит ΔBCD на два равных прямоугольных (по построению) треугольника (треугольники равны по общему катету и гипотенузе $CB = CD$), $\angle BCM = \angle DCM = 75^0$.

Рассмотрим ΔMCA – прямоугольный (опирается на диаметр). Пусть $\angle ACM = \alpha$, тогда $cos\angle ACM = \ cos\ \alpha = \frac{CA}{d}$.

Площадь $S_{\Delta BCA} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot sin(75 - \alpha)$, а $S_{\Delta DCA} = \frac{1}{2} DC \cdot CA \cdot sin(75 + \alpha)$.

Сумма этих площадей даст искомую площадь четырёхугольника $ABCD$.

$S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot \big(sin(75 - \alpha) + sin(75 + \alpha)\big)$,

применяя формулы синуса суммы и разности, получим:

$S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot 2sin75 \cdot cos\alpha$. Откуда $S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot 2sin75 \cdot \frac{CA}{d}$,

$S_{DABCD} = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot 2sin75 \cdot \frac{CB}{d} = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot 2sin75 \cdot \cos 75 = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot sin150 = \frac{CA^2}{4} = 1.$

Ответ: 1.

Вариант 2

1. Петя просматривал календарь 22 века, начиная с 2101 года и заканчивая 2200 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 22 веке?

Ответ: 11 лет.

2. Найти все y, для которых уравнение $\sin y \cdot (x - \sin y)^2 + ctgy \cdot (x - ctgy)^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \ y = \pm \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi m, m \in Z$.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD = 45^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $\sqrt[4]{2}$.

Ответ: 0,5.

Вариант 3

1. Петя просматривал календарь 23 века, начиная с 2201 года и заканчивая 2300 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 23 веке?

Ответ: 11 лет.

2. Найти все y, для которых уравнение $\cos y\cdot(x-\cos y)^2+tgy\cdot(x-tgy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y=\pi k,\ y=\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi k\in Z$.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=60^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $2\sqrt[4]{3}$.

Ответ: 3.

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?

Ответ: 8 лет.

2. Найти все y, для которых уравнение $tgy\cdot(x-tgy)^2+ctgy\cdot(x-ctgy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Критерии проверки работ

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Рассуждения о делителях, подбор части решений.

1 б – Верно составлена математическая модель числа **n** (введены все переменные и указаны их области изменения). Найден один или несколько «счастливых» годов (с проверкой).

2б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения. Записана формула «счастливого» года или указано верное разложение числа, полученного в ходе решения, на простые множители.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Какие-то преобразования, подбор частных решений.

1 б – Верно сведено к квадратному уравнению.

2 б – Рассмотрен один из случаев: D=0 или первый коэффициент в квадратном уравнении равен нулю.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б -Нарисован чертёж, найдены элементы треугольника, недостаточные для решения задачи.

1б – Доказано равенство двух равных треугольников на чертеже или с полным обоснованием.

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения. Задача решена для частного случая (AB=AD).

3 б - Задача решена верно.

1. A. Делим на 9

1.1 Условие

В МИФИ происходят перестановки в расписании, отчего у вас попросили узнать следующее:

Допустим, у вас есть массив a длины n. Он состоит из целых положительных чисел. Вам необходимо определить, возможно ли переставить его элементы таким образом, чтобы произведение любых двух соседних элементов делилось нацело на 9.

1.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 2*10^5$). Вторая строка содержит n целых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^9$).

1.3 Вывод

Выведите Yes, если это возможно, и No в противном случае

1.4 Пример входных данных

Sample Input:

7

8 8 8 9 8 7 8

Sample Output:

No

Sample Input:

7

7 7 9 9 7 9 7

Sample Output:

Yes

1.5 Решение

Посчитаем, сколько в массиве чисел кратных 9 (числа первого типа), сколько кратных 3, но не кратных 9 (числа второго типа) и остальных чисел (третий тип).

Рассмотрим случай, когда нет чисел второго типа. Тогда достаточно поставить поочередно числа первого и третьего типа. Если нам хватает чисел первого типа для такой расстановки – ответ "Yes", иначе это невозможно.

Рассмотрим более сложный случай – у нас есть числа второго типа. Очевидно, что нам нет смысла специально ставить рядом числа первого типа или ставить рядом первый и второй тип. Но тогда числа кратные 3 (второго типа) должны идти друг за другом, иначе не будет выполняться условие задачи. Получается, что достаточно их поставить, например, в начало массива. После этого задача сводится к более простой, уже рассмотренной нами. Непосредственно в коде строить такой массив не нужно, достаточно проверить несколько условий. Решение за O(n).

```python
type1 = 0
type2 = 0
type3 = 0
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
for i in range(n):
    if a[i] % 9 == 0:
        type1 += 1
    elif a[i] % 3 == 0:
        type2 += 1
    else:
        type3 += 1
if type2 == 0:
    if n // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
else:
    if (n - type2 + 1) // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
```

2. B. Играем в игры

2.1 Условие

У мифиста есть n игр. В i-ой игре есть a[i] число сессий, которые он должен в нее отыграть. Пусть дано целое число b, определяющее, сколько удовольствия он получит. Тогда за время прохождения всех сессий i-ой игры его удовольствие изменится следующим образом:

1) За время первой сессии он получит b единиц удовлетворения;
2) За вторую b−1;
3) За третью b−2 и так далее, пока все сессии не будут отыграны.

Соответственно, после отыгрывания очередной сессии удовольствие мифиста может начать уменьшаться. Также он обязан отыграть все a[i] сессий.
Необходимо узнать, хватит ли сил мифисту, чтобы сдать сессию. Для этого обработайте q запросов вида: даны числа L и b. Найдите такое число R (L≤ R), что он отыграет все сессии в каждой игре от L до R включительно и получит наибольшее удовольствие. Обратите внимание, что ответ может быть очень большим, поэтому используйте подходящий целочисленных тип данных в вашем языке (long long в C++, Long в Java и тд).

2.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \leq n \leq 5000$).

Вторая строка содержит n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \leq a_i \leq 10^6$).

Третья строка содержит одно целое число q ($1 \leq q \leq 5000$).

Следующие q строк содержат по два целых числа L и b ($1 \leq L \leq n$, $1 \leq b \leq 10^6$) - описания каждого запроса.

2.3 Вывод

Выведите q целых чисел, по одному на каждой строке. i-я строка должна содержать лучшее значение R для i-ого запроса. Если существует несколько возможных ответов, выведите наименьший из них.

2.4 Пример входных данных

Sample Input:
8
1 3 8 1 1 6 3 3
4
1 1
1 2
1 3
4 1
Sample Output:
1
2
8
5

2.5 Решение

Рассмотрим 1 игровую сессию, где число b определяет уровень удовольствия и где в игру надо отыграть a сессий. Тогда получится, что мы получим по очереди b, b-1, …, b – a + 1 удовольствия. Это сумма арифметической прогрессии с разностью 1, первым элементом b – a + 1 и количеством элементов равным a. Тогда сумма такой прогрессии равна (b – a + 1 + b) * a / 2 = (2 * b * a – a * a + a) / 2. Рассмотрим обработку запроса. Нам достаточно идти указателем по массиву и поддерживать текущее удовольствие. Если при игре во все игры до текущей позиции включительно удовольствие стало строго больше предыдущего максимума, то это оптимальный ответ на данный момент. Так можно сделать, просто пройдясь по массиву для каждого запроса. Решение за O(n*q).

```
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
q = int(input())
while q:
    l, b = map(int, input().split())
    l -= 1
    su = 0
    ans = -1e18
    R = -1
    for i in range(l, n):
        su += (a[i] + 2 * a[i] * b - a[i] * a[i]) // 2
        if su > ans:
            R = i + 1
            ans = su
    print(R)
    q -= 1
```

3. C. Объедаемся пирожками

3.1 Условие

Сегодня у Владислава знаменательный день: он пишет финальный этап олимпиады “ЮНИОР”. В силу этого ему нужно хорошо подкрепиться пирожками.

Так как в МИФИ за последнее время открылось очень много кафетериев, теперь можно приобрести целых n видов пирожков. Влад хочет ими пообедать, поэтому Вы хотите ему в этом помочь.

Влад очень не любит k чисел. Он хочет купить какой-то непустой набор пирожков так, чтобы число пирожков в нем не было его нелюбимым. Но также Влад любит разнообразие, поэтому он не хочет покупать более 1 пирожка каждого вида.

Помогите ему найти число различных наборов пирожков, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Так как число способов может быть крайне большим, выведите ответ по модулю 1000000007.

Обратите внимание, что у Влада нелюбимых чисел не больше 20.

3.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит два целых числа n ($1 \le n \le 10^9$) и k ($1 \le k \le \min(n, 20)$).

Вторая строка содержит k целых нелюбимых различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($1 \le a_i \le \min(n, 2*10^5)$), $a_i \ne a_j$ при $i \ne j$.

3.3 Вывод

Выведите число способов, которыми он может набрать себе пирожки на обед по модулю 1000000007.

3.4 Пример входных данных

Sample Input:
3 1
2
Sample Output:
4

3.5 Решение

Заметим, что, если переформулировать условие, то нужно выбрать из n чисел от 1 до n любой набор из них, размер которого не является нелюбимым числом. Количество всех различных наборов размера x – это число сочетаний из n по x. Есть известная формула, что сумма всех сочетаний из n по 0, 1, 2, …, n равна 2^n. Это число можно быстро посчитать по данному модулю, применив бинарное возведение в степень. Нам нужны все сочетания из n по 1, …, n за исключением k из них. Получается, что ответом будет являться разность 2^n и сочетаний из n по 0, из n по a_1, из n по a_2 и тд. Эти ~20 сочетаний можно посчитать по обычной формуле сочетаний, так как $a_i \le 2*10^5$. Также нужно помнить, что все операции должны проводится по данному модулю. Решение за $O(\log(n)+k*\max(a_i))$.

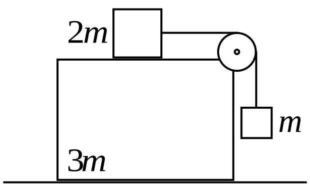
```python
m = 1000000007

def pw(a, b):
    ans = 1
    while b:
        if b % 2:
            ans = (ans * a) % m
        a = (a * a) % m
        b //= 2
    return ans

n, k = map(int, input().split())
a = list(map(int, input().split()))
ans = pw(2, n)
ans = m - 1 + ans
ans %= m
for i in range(k):
    s = 1
    s1 = 1
    for j in range(n - a[i] + 1, n + 1):
        s *= j
        s %= m
    for j in range(2, a[i] + 1):
        s1 *= j
        s1 %= m
    s1 = pw(s1, m - 2)
    s *= s1
    s %= m
    ans += m - s
    ans %= m
print(ans)
```

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2023-2024 учебного года, 10 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0,5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1,5 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль$\cdot$град). Ответ обосновать.

2. Если к источнику ЭДС подключить некоторый резистор, ток через источник составит $I_1 = 0,18$ А. Если к тому же источнику подключить второй резистор (отключив первый), ток через источник составит $I_2 = 0,21$ А. Если же к этому источнику подключить оба резистора, соединенных последовательно, ток через источник составит $I_3 = 0,14$ А. Каким будет ток через источник, если его клеммы замкнуть накоротко?

3. В системе из трех тел массами m, $2m$ и $3m$ (см. рисунок) коэффициент трения между большим телом и горизонтальной поверхностью стола равен μ. При каких значениях μ большое тело будет неподвижным на поверхности стола? Блок и веревка невесомы, веревка нерастяжима.



Решения и критерии оценивания

1. Давление испарившегося азота в сосуде найдем по закону Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

где $m = \rho V_0$, $\mu = 28$ г/моль – молярная масса азота, $T = (273 + 20)\ K$ - абсолютная температура азота. Отсюда находим

$$p = \frac{\rho V_0 RT}{\mu V} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Это давление больше предельного давления, которое выдерживает сосуд Дьюара, и, значит, до комнатной температуры азот в сосуде не сможет нагреться – сосуд разорвет. Температуру T_m, при которой это произойдет, найдем из закона Клпейрона-Менделеева, подставив в него предельное давление p_m:

$$T_m = \frac{p_m \mu V}{\rho V_0 R} = 168 \text{ К (или } -105°C\text{)}$$

Таким образом, сосуд разорвет, когда азот внутри нагреется до 168 К (или -105 градусов Цельсия).

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – использование закона Клапейрона-Менделеева для нахождения давления азота и сравнения его с предельным давлением – 1 балл
2. Правильный закон Клапейрона-Менделеева – 1 балл
3. Правильно найдена масса азота в сосуде – 1 балл
4. Правильный и обоснованный вывод, что азот в сосуде не сможет нагреться до комнатной температуры – 1 балл
5. Правильно найдена температура азота, при которой разорвется сосуд – 1 балл.
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

2. Пусть ЭДС источника ε, его внутреннее сопротивление r, сопротивление первого и второго подключаемых резисторов - R_1 и R_2. Тогда закон Ома для замкнутой цепи в первом втором и третьем случаях дает

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R_1}, \qquad I_2 = \frac{\varepsilon}{r + R_2}, \qquad I_3 = \frac{\varepsilon}{r + R_1 + R_2}$$

Переворачивая эти дроби

$$\frac{1}{I_1} = \frac{r}{\varepsilon} + \frac{R_1}{\varepsilon}, \qquad \frac{1}{I_2} = \frac{r}{\varepsilon} + \frac{R_2}{\varepsilon}, \qquad \frac{1}{I_3} = \frac{r}{\varepsilon} + \frac{R_1}{\varepsilon} + \frac{R_2}{\varepsilon}$$

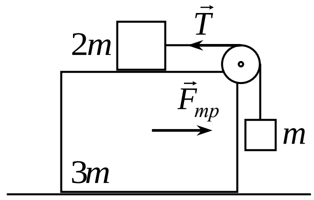
и складывая первые две и вычитая третью, получим

$$\frac{r}{\varepsilon} = \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} = \frac{I_3(I_1 + I_2) - I_1 I_2}{I_1 I_2 I_3}$$

Отсюда находим ток короткого замыкания источника

$$I = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{I_1 I_2 I_3}{I_3\left(I_1 + I_2\right) - I_1 I_2} = 0,315 \text{ А}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильно используется закон Ома для Замкнутой цепи – 1 балл
2. Правильный закон Ома в первом, втором и третьем случаях – 1 балл
3. Правильно решена система уравнений относительно величины закон r/ε (или ε/r) **– 1 балл**
4. Правильный ответ для тока короткого замыкания (формула) – 1 балл
5. Правильный ответ для тока короткого замыкания (число) – 1 балл
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям



3. На большое тело в горизонтальном направлении действует (через блок) сила натяжения нити. Поэтому большое тело будет покоиться, если эта сила будет меньше максимальной силы трения покоя, действующей на него со стороны горизонтальной поверхности

$$T \le F_{тр}$$

Найдем обе эти силы. Силу натяжения нити найдем из динамической задачи для тел m и $2m$ (при условии, что большое тело покоится). Второй закон Ньютона для тел m и $2m$ дает

$$2ma = T$$
$$ma = mg - T$$

где a - ускорение этих тел. Отсюда находим

$$T = \frac{2mg}{3}$$

Максимальная сила трения покоя на горизонтальной поверхности есть μN, где N - сила реакции, действующая между большим телом и поверхностью. Она компенсирует силы тяжести большого тела, тела массой $2m$ и силу T, действующую на большое тело через блок со стороны нити, прикрепленной к телу массой m. Поэтому

$$F_{тр} = \mu\left(5mg + \frac{2mg}{3}\right) = \frac{17\mu mg}{3}$$

Отсюда находим, что большое тело будет покоиться, если

$$\frac{17\mu mg}{3} \ge \frac{2mg}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \ge \frac{2}{17}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – чтобы большое тело покоилось сила натяжения нити должна быть меньше максимальной силы трения покоя между большим телом и горизонтальной поверхностью – 1 балл
2. Правильно найдена сила натяжения нити – 1 балл
3. Правильно найдена сила реакции между большим телом и горизонтальной поверхности – 1 балл
4. Использовано правильное соотношение для максимальной силы трения покоя – 1 балл.
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 1.

1. Петя просматривал календарь 21 века, начиная с 2001 года и заканчивая 2100 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n . Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 21 веке?

2. Найти все y, для которых уравнение $\sin y\cdot(x-\sin y)^2+\cos y\cdot(x-cosy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ ΔBCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=30^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 2.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть a – частное от деления n на 100, b – остаток от деления n на 100. Тогда $n=100a+b$. Последний год века «счастливый»: $a=21, b=0$. Для всех остальных n частное $a=20$, а остаток $b\in[1;99]$. По условию, год счастливый, если $(b+2000)\colon(b+20)$, тогда $\frac{b+2000}{b+20}=\frac{b+20}{b+20}+\frac{1980}{b+20}$. Таким образом, число $b+20\geq 21$ должно быть делителем числа $1980=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11$. Найдём число делителей этого числа. Всего число 1980 имеет $(2+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=36$ делителей, среди которых 13 (1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,15,18,20) меньше 21. Поэтому каждому из 36-13=23 делителей соответствует свое $b\geq1$ и свой номер «счастливого» года.

Ответ: 24 года.

Задача 2. Пусть $a=\sin y, b=\cos y$. Запишем исходное уравнение в виде
$b\cdot(x-a)^2+a\cdot(x-b)^2=0$, тогда $(a+b)\cdot x^2-2(a^2+b^2)\cdot x+\ a^3+b^3=0$.
Получим квадратное уравнение, если $(a+b)\neq0$. И линейное уравнение, если $(a+b)=0$.
Если уравнение линейное, то получим единственное решение при условии $a+b=0, a\neq0$.

Откуда $siny+cosy=0$. Тогда $tgy=-1\to y=-\frac{\pi}{4}+\pi k$.

Если уравнение квадратное, то единственное решение получим, при условии $a+b\neq0, D/4=0$.
$\frac{D}{4}=(a^2+b^2)^2-(a^3+b^3)\cdot(a+b)=-ab(a-b)^2=0$. Значит, $a=0$ или $b=0$, или $a=b$.

$$a=0, b\neq0, siny=0, y=\pi m, m\in Z.$$
$$b=0, a\neq0, cosy=0, y=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

$a=b,\ a\neq0,\ b\neq0,\ siny=\ cosy,\ y=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

Объединяя все варианты, приходим к выводу, что при $y=\frac{\pi k}{4}, k\in Z$ уравнение имеет единственное решение.

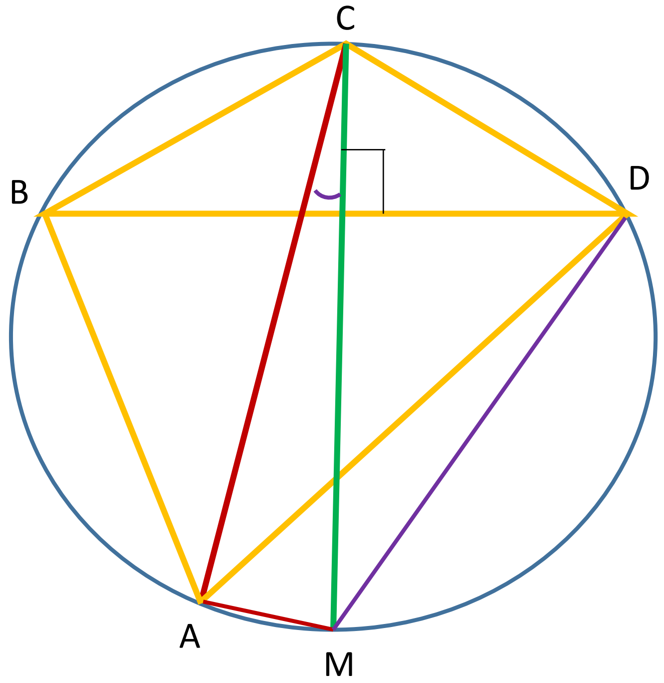
Ответ: $y=\frac{\pi k}{4}, k\in Z$.

Задача 3. По условию задачи ΔBCD и ΔBAD вписаны в окружность, значит четырёхугольник $ABCD$ также вписан в окружность. По свойству углов вписанного четырёхугольника $\angle BCD = 150^0$, так как $\angle BAD = 30^0$.

Дополнительное построение: проведём диаметр $CM = d$ $(CM \perp BD)$.

ΔMCD – прямоугольный (опирается на диаметр), $cos\angle DCM = \frac{CD}{d} = \frac{CB}{d}$.

ΔBCD – равнобедренный, значит CM делит ΔBCD на два равных прямоугольных (по построению) треугольника (треугольники равны по общему катету и гипотенузе $CB = CD$), $\angle BCM = \angle DCM = 75^0$.



Рассмотрим ΔMCA – прямоугольный (опирается на диаметр). Пусть $\angle ACM = \alpha$, тогда $cos\angle ACM = cos\ \alpha = \frac{CA}{d}$.

Площадь $S_{\Delta BCA} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot sin(75 - \alpha)$, а $S_{\Delta DCA} = \frac{1}{2} DC \cdot CA \cdot sin(75 + \alpha)$.

Сумма этих площадей даст искомую площадь четырёхугольника $ABCD$.

$S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot \left(sin(75 - \alpha) + sin(75 + \alpha)\right)$,

применяя формулы синуса суммы и разности, получим:

$S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot 2sin75 \cdot cos\alpha$. Откуда $S_{DABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot 2sin75 \cdot \frac{CA}{d}$,

$S_{DABCD} = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot 2sin75 \cdot \frac{CB}{d} = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot 2sin75 \cdot \cos 75 = \frac{1}{2} CA \cdot CA \cdot sin150 = \frac{CA^2}{4} = 1.$

Ответ: 1.

Вариант 2

1. Петя просматривал календарь 22 века, начиная с 2101 года и заканчивая 2200 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 22 веке?

Ответ: 11 лет.

2. Найти все y, для которых уравнение $\sin y \cdot (x - \sin y)^2 + ctgy \cdot (x - ctgy)^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, y = \pm \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi m, m \in Z$.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD = 45^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $\sqrt[4]{2}$.

Ответ: 0,5.

Вариант 3

1. Петя просматривал календарь 23 века, начиная с 2201 года и заканчивая 2300 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 23 веке?

Ответ: 11 лет.

2. Найти все y, для которых уравнение $\cos y \cdot (x - \cos y)^2 + tgy \cdot (x - tgy)^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y = \pi k,\ y = \pm \arcsin \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi k \in Z$.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD = 60^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $2\sqrt[4]{3}$.

Ответ: 3.

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?

Ответ: 8 лет.

2. Найти все y, для которых уравнение $tgy \cdot (x - tgy)^2 + ctgy \cdot (x - ctgy)^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ: $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD = 120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Критерии проверки работ

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Рассуждения о делителях, подбор части решений.

1 б – Верно составлена математическая модель числа **n** (введены все переменные и указаны их области изменения). Найден один или несколько «счастливых» годов (с проверкой).

2б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения. Записана формула «счастливого» года или указано верное разложение числа, полученного в ходе решения, на простые множители.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Какие-то преобразования, подбор частных решений.

1 б – Верно сведено к квадратному уравнению.

2 б – Рассмотрен один из случаев: D=0 или первый коэффициент в квадратном уравнении равен нулю.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б -Нарисован чертёж, найдены элементы треугольника, недостаточные для решения задачи.

1б – Доказано равенство двух равных треугольников на чертеже или с полным обоснованием.

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения. Задача решена для частного случая (AB=AD).

3 б - Задача решена верно.