**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»**
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,**
**профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс**

**Вариант № 1**

**1.** По кругу написано $2023$ положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.

**2.** Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $3x+5=\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $(x; y)$ с наибольшим возможным значением $x$.

**3.** На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1+\dfrac{a}{2}$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

## Ответы и решения

**Задача 1.** Пусть по кругу записаны положительные числа $a_1,\ldots,a_{2023}$. Не ограничивая общности, можно считать что числа занумерованы так, что $a_{2023}=a$ – наибольшее из чисел, записанных по кругу. Тогда два следующих за ним по часовой стрелке числа из данного набора будут $a_1$ и $a_2$. Поскольку $0<a_1\le a,\ 0<a_2\le a,$ имеет место оценка $a^2=a_1+a_2\le 2a$. Таким образом, $0<a\le 2.$ Следовательно, для всех $k=1,\ldots,2023$ верно, что

$$0<a_k\le 2.$$

С другой стороны, можно числа по кругу занумеровать так, чтобы $b_{2023}=b$ стало наименьшим из чисел, записанных по кругу. Тогда два следующих за ним по часовой стрелке числа из данного набора будут $b_1$ и $b_2$. Поскольку $0<b\le b_1,\ 0<b\le b_2,$ имеет место оценка $b^2=b_1+b_2\ge 2b$. Таким образом, $b\ge 2.$ Следовательно, для всех $k=1,\ldots,2023$ верно, что

$$b_k\ge 2.$$

Оба эти условия могут быть выполнены только если все числа равны двум. Тогда их сумма будет $S=2\cdot 2023=4046.$

**Ответ:** 4046.

**Задача 2.** Область допустимых значений (ОДЗ) пар: $\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]>0\Rightarrow 10^{3y}\cdot 2^{x}\ge 1\Rightarrow 3y+x\lg 2\ge 0.$ Для любых допустимых $x$ и $y$ найдется целое число $n$, для которого выполнено $10^{n}\le 2^{x}<10^{n+1}$. Тогда

$$\begin{cases}10^{n+y}\le 10^{y}\cdot 2^{x}<10^{n+y+1}\\ 10^{n+3y}\le 10^{3y}\cdot 2^{x}<10^{n+3y+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10^{n+y}\le 10^{y}\cdot 2^{x}<10^{n+y+1}\\ 10^{n+3y}\le\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]<10^{n+3y+1}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n+y\le\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)<n+y+1\\ n+3y\le\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]<n+3y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]=n+y\\ \left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]=n+3y\end{cases}$$

Таким образом, для любой допустимой пары $(x; y)$ получаем

$$3x+5=\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]=(n+y)-(n+3y)=-2y,$$

то есть $3x+5=-2y$ вне зависимости от $n$.

Теперь решаем уравнение $3x+2y+5=0$ в целых числах. Имеем

$$y=\frac{-5-3x}{2}=-3-2x+\frac{1+x}{2},$$

тогда находим частное решение $x_0=-1,\ y_0=-1.$ Отсюда, общее решение $\begin{cases} x=-1-2k \\ y=-1+3k \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

Проверим, какие пары $(x; y)$ удовлетворяют ОДЗ:

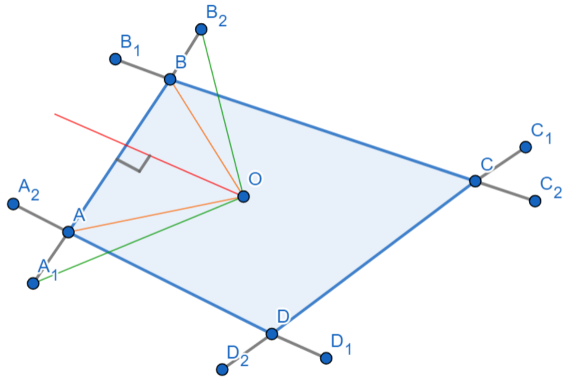
$$3y+x\lg 2\geq 0\Rightarrow 3(3k-1)+\lg 2\cdot(-1-2k)\geq 0\Rightarrow (9-\lg 4)k\geq 3+\lg 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\geq\left[\frac{3+\lg 2}{9-\lg 4}\right]+1=\left[\frac{\lg\left(2\cdot 10^{3}\right)}{\lg\left(25\cdot 10^{7}\right)}\right]+1=1.$$

Получаем, что допустимые значения $(x; y)$ отвечают $k\geq 1,$ поэтому наибольшее $x$ соответствует $k=1,$ значит $x=-3,\ y=2$.

**Ответ:** $x=-3,\ y=2$

**Задача 3.** Пусть $O$ – центр окружности радиуса $R=\sqrt{5}$, описанной около восьмиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$.




По условию: $AA_1=AA_2=BB_1=BB_2=DD_2=1.$

Рассмотрим пересекающиеся хорды $A_1D_2$ и $A_2B_1$.

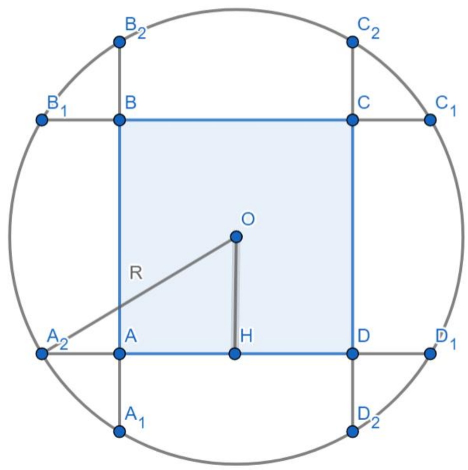
По свойству хорд окружности имеем

$AA_1\cdot AD_2=AA_2\cdot AB_1\Rightarrow AD_2=AB_1\Rightarrow AD=AB.$

Аналогично получим, что $AB=BC,\ BC=CD.$

Таким образом, все стороны четырехугольника $ABCD$ равны, значит он ромб.

Точка $O$, равноудаленная от вершин $A_1$ и $B_2$, а значит, и от вершин $A$ и $B$, лежит на срединном перпендикуляре к отрезку $A_1B_2$, а значит, и на серединном перпендикуляре к стороне $AB$. Это верно и для остальных сторон четырехугольника $ABCD$, поэтому точка $O$ равноудалена от всех его вершин и, таким образом, является центром окружности, описанной около четырехугольника. Поскольку $ABCD$ вписан и является ромбом,




то он квадратом со стороной $a$. Пусть $OH$ – расстояние от точки $O$ до стороны $AB$ $(OH\perp AB)$. Тогда получим в прямоугольном треугольнике $A_2OH$ стороны

$$A_2O=R,\quad OH=\frac{a}{2},\quad A_2H=1+\frac{a}{2}.$$

При этом $\dfrac{a^2}{4}+\left(1+\dfrac{a}{2}\right)^2=R^2=5,$ откуда для нахождения стороны квадрата получаем уравнение $a^2+2a-8=0$ с положительным корнем $a=2$. Тогда площадь $ABCD$ равна $S=a^2=4.$

**Ответ:** $S=4$.

## Вариант №2

**1.** По кругу написано $2024$ положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму квадратов этих чисел

**Ответ:** 8096

**2.** Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $2x-7=\left[\lg\left(10^{2y}\cdot 3^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{-y}\cdot 3^x\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением $y$.

**Ответ:** $x=11,\ y=5$

**3.** На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $2+\frac{a}{2}$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{26}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ:** $S=1$

## Вариант №3

**1.** По кругу написано $50$ положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.

**Ответ:** $2^{50}$

**2.** Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^x\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением $x$.

**Ответ:** $x=-1,\ y=1$

**3.** На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+\frac{a}{3}$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ:** $S=16$

## Вариант №4

**1.** По кругу написано $25$ положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти квадрат суммы этих чисел.

**Ответ:** 2500

**2.** Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $2x+1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 5^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{4y}\cdot 5^x\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $(x;y)$ с наименьшим возможным значением $y$.

**Ответ:** $x=-3,\ y=1$

**3.** На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $4+\frac{a}{2}$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{130}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ:** $S=9$

# Критерии проверки работ

**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 9 класс**

**Во всех задачах ответ без решения** – 0 б.

**Задача 1.**

обосновано только, что все числа в круге $\geq 2$ ( или $\leq 2$ ) **1**

обоснованы оба свойсва и сделан вывод, что все числа равны 2, но имеется небольшая погрешность в вычислении нужной суммы **2**

полностью обоснованное верное решение **3**

**Задача 2.**

только ответ, подбор **0**

верно найдено ОДЗ **1**

на основе свойств целых чисел и сложных функций получены целочисленные уравнения и выписаны их решения, но не найдена или найдена с ошибкой требуемая пара решений **2**

задача решена полностью обоснованно и верно **3**

**Задача 3.**

только чертеж (чертежи) **0**

чертежи с обоснованием, что ABCD – квадрат **1**

выражена и найдена сторона квадрата и площадь, но имеются небольшие вычислительные погрешности **2**

полностью обоснованное верное решение **3**

# 1. A. Делим на 9

## 1.1 Условие

В МИФИ происходят перестановки в расписании, отчего у вас попросили узнать следующее:

Допустим, у вас есть массив a длины n. Он состоит из целых положительных чисел. Вам необходимо определить, возможно ли переставить его элементы таким образом, чтобы произведение любых двух соседних элементов делилось нацело на 9.

## 1.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 2*10^5$). Вторая строка содержит n целых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^9$).

## 1.3 Вывод

Выведите Yes, если это возможно, и No в противном случае

## 1.4 Пример входных данных

**Sample Input**:

7

8 8 8 9 8 7 8

**Sample Output**:

No

**Sample Input**:

7

7 7 9 9 7 9 7

**Sample Output**:

Yes

## 1.5 Решение

Посчитаем, сколько в массиве чисел кратных 9 (числа первого типа), сколько кратных 3, но не кратных 9 (числа второго типа) и остальных чисел (третий тип).

Рассмотрим случай, когда нет чисел второго типа. Тогда достаточно поставить поочередно числа первого и третьего типа. Если нам хватает чисел первого типа для такой расстановки – ответ “Yes”, иначе это невозможно.

Рассмотрим более сложный случай – у нас есть числа второго типа. Очевидно, что нам нет смысла специально ставить рядом числа первого типа или ставить рядом первый и второй тип. Но тогда числа кратные 3 (второго типа) должны идти друг за другом, иначе не будет выполняться условие задачи. Получается, что достаточно их поставить, например, в начало массива. После этого задача сводится к более простой, уже рассмотренной нами. Непосредственно в коде строить такой массив не нужно, достаточно проверить несколько условий. Решение за O(n).

```python
type1 = 0
type2 = 0
type3 = 0
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
for i in range(n):
    if a[i] % 9 == 0:
        type1 += 1
    elif a[i] % 3 == 0:
        type2 += 1
    else:
        type3 += 1
if type2 == 0:
    if n // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
else:
    if (n - type2 + 1) // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
```

# 2. B. Играем в игры

## 2.1 Условие

У мифиста есть n игр. В i-ой игре есть a[i] число сессий, которые он должен в нее отыграть. Пусть дано целое число b, определяющее, сколько удовольствия он получит. Тогда за время прохождения всех сессий i-ой игры его удовольствие изменится следующим образом:

1) За время первой сессии он получит b единиц удовлетворения;
2) За вторую b−1;
3) За третью b−2 и так далее, пока все сессии не будут отыграны.

Соответственно, после отыгрывания очередной сессии удовольствие мифиста может начать уменьшаться. Также он обязан отыграть все a[i] сессий.
Необходимо узнать, хватит ли сил мифисту, чтобы сдать сессию. Для этого обработайте q запросов вида: даны числа L и b. Найдите такое число R (L≤ R), что он отыграет все сессии в каждой игре от L до R включительно и получит наибольшее удовольствие. Обратите внимание, что ответ может быть очень большим, поэтому используйте подходящий целочисленных тип данных в вашем языке (long long в C++, Long в Java и тд).

## 2.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 5000$).

Вторая строка содержит n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^6$).

Третья строка содержит одно целое число q ($1 \le q \le 5000$).

Следующие q строк содержат по два целых числа L и b ($1 \le L \le n$, $1 \le b \le 10^6$) - описания каждого запроса.

## 2.3 Вывод

Выведите q целых чисел, по одному на каждой строке. i-я строка должна содержать лучшее значение R для i-ого запроса. Если существует несколько возможных ответов, выведите наименьший из них.

## 2.4 Пример входных данных

**Sample Input**:
8
1 3 8 1 1 6 3 3
4
1 1
1 2
1 3
4 1
**Sample Output**:
1
2
8
5

## 2.5 Решение

Рассмотрим 1 игровую сессию, где число b определяет уровень удовольствия и где в игру надо отыграть a сессий. Тогда получится, что мы получим по очереди b, b-1, …, b – a + 1 удовольствия. Это сумма арифметической прогрессии с разностью 1, первым элементом b – a + 1 и количеством элементов равным a. Тогда сумма такой прогрессии равна (b – a + 1 + b) * a / 2 = (2 * b * a – a * a + a) / 2. Рассмотрим обработку запроса. Нам достаточно идти указателем по массиву и поддерживать текущее удовольствие. Если при игре во все игры до текущей позиции включительно удовольствие стало строго больше предыдущего максимума, то это оптимальный ответ на данный момент. Так можно сделать, просто пройдясь по массиву для каждого запроса. Решение за O(n*q).

```
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
q = int(input())
while q:
      l, b = map(int, input().split())
      l -= 1
      su = 0
      ans = -1e18
      R = -1
      for i in range(l, n):
            su += (a[i] + 2 * a[i] * b - a[i] * a[i]) // 2
            if su > ans:
                  R = i + 1
                  ans = su
      print(R)
      q -= 1
```

# 3. C. Объедаемся пирожками

## 3.1 Условие

Сегодня у Владислава знаменательный день: он пишет финальный этап олимпиады “ЮНИОР”. В силу этого ему нужно хорошо подкрепиться пирожками.

Так как в МИФИ за последнее время открылось очень много кафетериев, теперь можно приобрести целых n видов пирожков. Влад хочет ими пообедать, поэтому Вы хотите ему в этом помочь.

Влад очень не любит k чисел. Он хочет купить какой-то непустой набор пирожков так, чтобы число пирожков в нем не было его нелюбимым. Но также Влад любит разнообразие, поэтому он не хочет покупать более 1 пирожка каждого вида.

Помогите ему найти число различных наборов пирожков, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Так как число способов может быть крайне большим, выведите ответ по модулю 1000000007.

Обратите внимание, что у Влада нелюбимых чисел не больше 20.

## 3.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит два целых числа n ($1 \le n \le 10^9$) и k ($1 \le k \le \min(n, 20)$).

Вторая строка содержит k целых нелюбимых различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($1 \le a_i \le \min(n, 2*10^5)$), $a_i \ne a_j$ при $i \ne j$.

## 3.3 Вывод

Выведите число способов, которыми он может набрать себе пирожки на обед по модулю 1000000007.

## 3.4 Пример входных данных

**Sample Input**:
3 1
2
**Sample Output**:
4

## 3.5 Решение

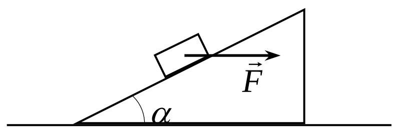
Заметим, что, если переформулировать условие, то нужно выбрать из n чисел от 1 до n любой набор из них, размер которого не является нелюбимым числом. Количество всех различных наборов размера x – это число сочетаний из n по x. Есть известная формула, что сумма всех сочетаний из n по 0, 1, 2, …, n равна $2^n$. Это число можно быстро посчитать по данному модулю, применив бинарное возведение в степень. Нам нужны все сочетания из n по 1, …, n за исключением k из них. Получается, что ответом будет являться разность $2^n$ и сочетаний из n по 0, из n по $a_1$, из n по $a_2$ и тд. Эти ~20 сочетаний можно посчитать по обычной формуле сочетаний, так как $a_i \le 2*10^5$. Также нужно помнить, что все операции должны проводится по данному модулю. Решение за $O(\log(n)+k*\max(a_i))$.

```python
m = 1000000007

def pw(a, b):
    ans = 1
    while b:
        if b % 2:
            ans = (ans * a) % m
        a = (a * a) % m
        b //= 2
    return ans

n, k = map(int, input().split())
a = list(map(int, input().split()))
ans = pw(2, n)
ans = m - 1 + ans
ans %= m
for i in range(k):
    s = 1
    s1 = 1
    for j in range(n - a[i] + 1, n + 1):
        s *= j
        s %= m
    for j in range(2, a[i] + 1):
        s1 *= j
        s1 %= m
    s1 = pw(s1, m - 2)
    s *= s1
    s %= m
    ans += m - s
    ans %= m
print(ans)
```

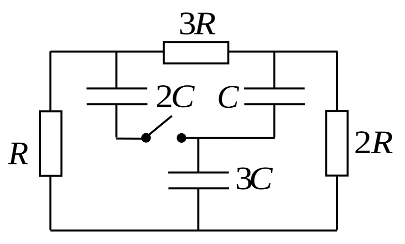
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,**
**профиль «Инженерные науки»,**
**Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса**
**2023-2024 учебного года, Олимпиада по физике, 11 класс**

**1.** В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0,5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1\cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м$^3$, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль$\cdot$град). Ответ обосновать.

**2**. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании $\alpha$. На наклонную грань этого клина кладут тело массой $m$ и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу $F$. Трение между телом и клином отсутствует.




**3.** Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов $R$, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов $C$, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом $q$ (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты $Q_R$, $Q_{2R}$ и $Q_{3R}$ выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



**Решения и критерии оценивания**

**1.** Давление испарившегося азота в сосуде найдем по закону Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

где $m = \rho V_0$, $\mu = 28$ г/моль – молярная масса азота, $T = (273 + 20)\ K$ - абсолютная температура азота. Отсюда находим

$$p = \frac{\rho V_0 RT}{\mu V} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

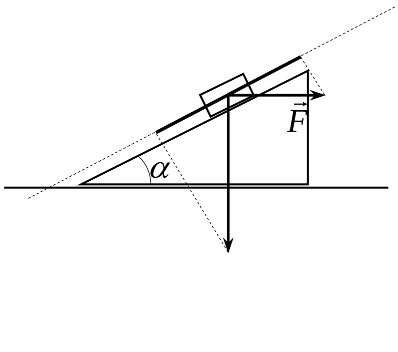
Это давление больше предельного давления, которое выдерживает сосуд Дьюара, и, значит, до комнатной температуры азот в сосуде не сможет нагреться – сосуд разорвет. Температуру $T_m$, при которой это произойдет, найдем из закона Клпейрона-Менделеева, подставив в него предельное давление $p_m$:

$$T_m = \frac{p_m \mu V}{\rho V_0 R} = 168 \text{ К (или } -105°C\text{)}$$

Таким образом, сосуд разорвет, когда азот внутри нагреется до 168 К (или -105 градусов Цельсия).

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)**
**1. Правильная идея решения – использование закона Клапейрона-Менделеева для нахождения давления азота и сравнения его с предельным давлением – 1 балл**
**2. Правильный закон Клапейрона-Менделеева – 1 балл**
**3. Правильно найдена масса азота в сосуде – 1 балл**
**4. Правильный и обоснованный вывод, что азот в сосуде не сможет нагреться до комнатной температуры – 1 балл**
**5. Правильно найдена температура азота, при которой разорвется сосуд – 1 балл.**
**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

**2.** Так как клин не закреплен, то ускорение тела не направлено вдоль его наклонной грани, а может быть направлено по-разному. В данном случае по условию оно направлено перпендикулярно наклонной грани. Это значит, что сумма сил, действующих на тело – а это сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции клина $\vec{N}$ и внешняя сила $\vec{F}$ - направлена перпендикулярно наклонной грани. А так как сила реакции в случае гладкой плоскости направлена перпендикулярно наклонной грани, то перпендикулярно наклонной грани направлена сумма сил тяжести $m\vec{g}$ и внешней силы $\vec{F}$. А чтобы так было должны равняться друг другу по величине проекции силы тяжести $m\vec{g}$ и внешней силы $\vec{F}$ на направление вдоль плоскости (см. рисунок; указанные проекции выделены жирным). Поэтому

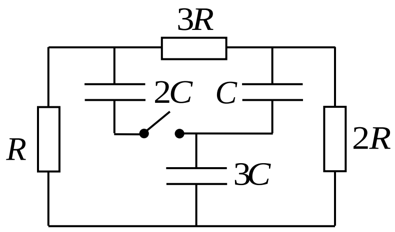



$$F = mg\,\mathrm{tg}\alpha$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)**

**1. Правильно расставлены силы, действующие на тело – 1 балл**
**2. Правильный понято, что сумма сил, действующих на тело, направлена перпендикулярно наклонной грани клина – 1 балла**
**3. Правильный вывод, что сумма сил тяжести и внешней силы направлена перпендикулярно наклонной грани клина – 1 балл**
**4. Правильно найдены проекции сил тяжести и внешней силы на направление вдоль наклонной грани – 1 балл**
**5. Правильный ответ – 1 балл**
**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

**3.** До замыкания ключа напряжение $U_{2C}$ на конденсаторе $2C$ равно




$$U_{2C} = \frac{Q}{2C},$$

напряжения на конденсаторах $C$ и $3C$ - равны нулю

$$U_C = 0, \qquad U_{3C} = 0.$$

Поэтому напряжения на резисторах равны

$$U_R = U_{2C}, \qquad U_{2R} = 0, \qquad U_{3R} = U_{2C}$$

Поэтому сразу после замыкания ключа токи пойдут через резисторы $R$ и $3R$, а через резистор $2R$ ток вообще не потечет. При этом из закона Ома заключаем, что токи, текущие через резисторы $R$ и $3R$ будут относиться как 3:1. Следовательно, через небольшое время после замыкания ключа конденсаторы $C$ и $3C$ зарядятся зарядами $q_C$ и $q_{3C}$, которые отличаются в 3 раза

$$\frac{q_C}{q_{3C}} = \frac{1}{3},$$

а напряжения на этих конденсаторах будут равны друг другу

$$\frac{U_C}{U_{3C}} = \left(\frac{q_C}{C}\right) : \left(\frac{q_{3C}}{3C}\right) = \frac{q_C}{q_{3C}} \cdot 3 = 1$$

А поскольку полярности зарядки конденсаторов $C$ и $3C$ отличаются (если определять их, например, снизу вверх на приведенной схеме), то напряжение на резисторе $2R$ останется равным нулю.

Далее. Так как напряжения $U_C$ и $U_{3C}$ на конденсаторах $C$ и $3C$ через небольшое время после замыкания ключа будут одинаковыми, то напряжения на резисторах $R$ и $3R$, которые равны $U_{2C} - U_{3C}$ и $U_{2C} - U_C$ соответственно, будут одинаковыми. Следовательно, отношение токов, текущих через резисторы $R$ и $3R$ будут будет по-прежнему равно 3:1; таким же будет и отношение зарядов, пришедших на конденсаторы $3C$ и $C$ в этот момент времени. А конденсатор $2C$ снова не зарядится. И так далее.

Из проведенных рассуждений заключаем, что отношение токов, текущих через резисторы $R$ и $3R$ в любой момент времени, равно 3:

$$\frac{I_R}{I_{3R}} = 3,$$

электрический ток через резистор $2R$ был равен нулю в любой момент времени, напряжения на конденсаторах $C$ и $3C$ равны друг другу в любой момент времени.

Чтобы найти, выделившиеся на резисторах, используем энергетические соображения. В начале вся энергия цепи

$$W_н = \frac{q^2}{4C}$$

была запасена в конденсаторе $2C$, в конце – во всех трех конденсаторах. Разность начальной и конечной энергий и выделяется на резисторах. Найдем ее. После полной зарядки конденсаторов $C$ и $3C$ мы имеем три параллельно соединенных конденсатора, заряды которых определяются соотношениями

$$q_C + q_{2C} + q_{3C} = Q$$
$$\frac{q_C}{C} = \frac{q_{2C}}{2C} = \frac{q_{3C}}{3C}$$

Отсюда находим, заряды конденсаторов и энергию, запасенную в конденсаторах после установления равновесия

$$q_C = \frac{1}{6}q, \qquad q_{2C} = \frac{1}{3}q, \qquad q_{3C} = \frac{1}{2}q$$

$$W_к = \frac{(q/6)^2}{2C} + \frac{(q/3)^2}{4C} + \frac{(q/2)^2}{6C} = \frac{q^2}{12C}$$

Таким образом, полное количество теплоты, выделившееся в цепи, есть

$$W_к - W_н = \frac{q^2}{6C}$$

А поскольку токи через резисторы $R$ и $3R$ в любой момент времени отличались втрое, а ток через резистор $2R$ был равен нулю, из закона Джоуля-Ленца заключаем, что на резисторе $R$ выделилось втрое большее количество тепла, чем на резисторе $3R$, а на резисторе $2R$ тепло вообще не выделялось. Поэтому

$$Q_R = \frac{3}{4}(W_к - W_н) = \frac{q^2}{8C}, \qquad Q_{2R} = 0, \qquad Q_{3R} = \frac{1}{4}(W_к - W_н) = \frac{q^2}{24C}$$

**Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)**
**1. Правильный вывод, что токи, текущие через резисторы $R$ и $3R$ отличаются в 3 раза в любой момент времени – 1 балл**
**2. Правильный вывод, что ток через резистор $2R$ в любой момент времени не течет – 1 балл**
**3. Правильно найдены заряды конденсаторов после установления равновесия – 1 балл**
**4. Правильно найдено полное количество теплоты, выделяющееся в цепи – 1 балл**
**5. Правильные ответы – 1 балл**
**Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.**

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»**
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,**
**профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс**

## Вариант № 1

**1.** По кругу написано $2023$ положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.

**2.** Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $3x+5=\left[\lg\left(10^y\cdot 2^x\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $(x;y)$ с наибольшим возможным значением $x$.

**3.** На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1+\dfrac{a}{2}$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

## Ответы и решения

**Задача 1.** Пусть по кругу записаны положительные числа $a_1,\dots,a_{2023}$. Не ограничивая общности, можно считать что числа занумерованы так, что $a_{2023}=a$ – наибольшее из чисел, записанных по кругу. Тогда два следующих за ним по часовой стрелке числа из данного набора будут $a_1$ и $a_2$. Поскольку $0<a_1\le a,\ 0<a_2\le a,$ имеет место оценка $a^2=a_1+a_2\le 2a$. Таким образом, $0<a\le 2$. Следовательно, для всех $k=1,\dots,2023$ верно, что

$$0<a_k\le 2.$$

С другой стороны, можно числа по кругу занумеровать так, чтобы $b_{2023}=b$ стало наименьшим из чисел, записанных по кругу. Тогда два следующих за ним по часовой стрелке числа из данного набора будут $b_1$ и $b_2$. Поскольку $0<b\le b_1,\ 0<b\le b_2,$ имеет место оценка $b^2=b_1+b_2\ge 2b$. Таким образом, $b\ge 2$. Следовательно, для всех $k=1,\dots,2023$ верно, что

$$b_k\ge 2.$$

Оба эти условия могут быть выполнены только если все числа равны двум. Тогда их сумма будет $S=2\cdot 2023=4046$.
**Ответ:** 4046.

**Задача 2.** Область допустимых значений (ОДЗ) пар: $\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]>0\Rightarrow 10^{3y}\cdot 2^x\ge 1\Rightarrow 3y+x\lg 2\ge 0$. Для любых допустимых $x$ и $y$ найдется целое число $n$, для которого выполнено $10^n\le 2^x<10^{n+1}$. Тогда

$$\begin{cases}10^{n+y}\le 10^y\cdot 2^x<10^{n+y+1}\\ 10^{n+3y}\le 10^{3y}\cdot 2^x<10^{n+3y+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10^{n+y}\le 10^y\cdot 2^x<10^{n+y+1}\\ 10^{n+3y}\le\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]<10^{n+3y+1}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n+y\le\lg\left(10^y\cdot 2^x\right)<n+y+1\\ n+3y\le\lg\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]<n+3y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\lg\left(10^y\cdot 2^x\right)\right]=n+y\\ \left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^x\right]\right]=n+3y\end{cases}$$

Таким образом, для любой допустимой пары $(x;y)$ получаем

$$3x+5=\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]=(n+y)-(n+3y)=-2y,$$

то есть $3x+5=-2y$ вне зависимости от $n$.

Теперь решаем уравнение $3x+2y+5=0$ в целых числах. Имеем

$$y=\frac{-5-3x}{2}=-3-2x+\frac{1+x}{2},$$

тогда находим частное решение $x_0=-1,\ y_0=-1.$ Отсюда, общее решение $\begin{cases}x=-1-2k\\ y=-1+3k\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

Проверим, какие пары $(x;y)$ удовлетворяют ОДЗ:

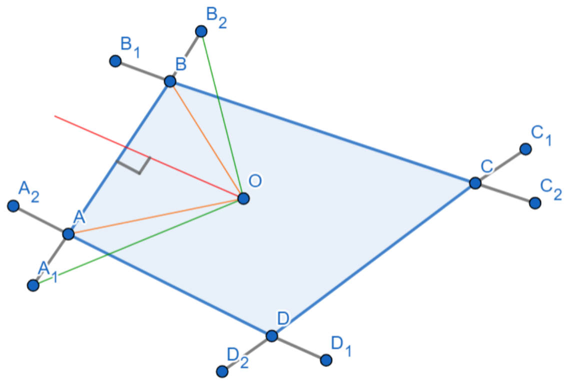
$$3y+x\lg 2\ge 0\Rightarrow 3(3k-1)+\lg 2\cdot(-1-2k)\ge 0\Rightarrow (9-\lg 4)k\ge 3+\lg 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\ge\left[\frac{3+\lg 2}{9-\lg 4}\right]+1=\left[\frac{\lg\left(2\cdot 10^{3}\right)}{\lg\left(25\cdot 10^{7}\right)}\right]+1=1.$$

Получаем, что допустимые значения $(x;y)$ отвечают $k\ge 1,$ поэтому наибольшее $x$ соответствует $k=1,$ значит $x=-3,\ y=2$.

**Ответ:** $x=-3,\ y=2$

**Задача 3.** Пусть $O$ – центр окружности радиуса $R=\sqrt{5}$, описанной около восьмиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$.




По условию: $AA_1=AA_2=BB_1=BB_2=DD_2=1$.

Рассмотрим пересекающиеся хорды $A_1D_2$ и $A_2B_1$.

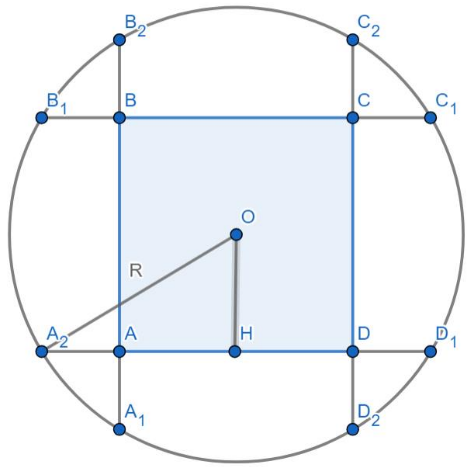
По свойству хорд окружности имеем

$AA_1\cdot AD_2=AA_2\cdot AB_1\Rightarrow AD_2=AB_1\Rightarrow AD=AB.$

Аналогично получим, что $AB=BC,\ BC=CD.$

Таким образом, все стороны четырехугольника $ABCD$ равны, значит он ромб.

Точка $O$, равноудаленная от вершин $A_1$ и $B_2$, а значит, и от вершин $A$ и $B$, лежит на срединном перпендикуляре к отрезку $A_1B_2$, а значит, и на серединном перпендикуляре к стороне $AB$. Это верно и для остальных сторон четырехугольника $ABCD$, поэтому точка $O$ равноудалена от всех его вершин и, таким образом, является центром окружности, описанной около четырехугольника. Поскольку $ABCD$ вписан и является ромбом, то он квадратом со стороной $a$. Пусть $OH$ – расстояние от точки $O$ до стороны $AB$ $(OH\perp AB)$. Тогда получим в прямоугольном треугольнике $A_2OH$ стороны




$$A_2O=R,\quad OH=\frac{a}{2},\quad A_2H=1+\frac{a}{2}.$$

При этом $\dfrac{a^2}{4}+\left(1+\dfrac{a}{2}\right)^2=R^2=5,$ откуда для нахождения стороны квадрата получаем уравнение $a^2+2a-8=0$ с положительным корнем $a=2$. Тогда площадь $ABCD$ равна $S=a^2=4.$

**Ответ:** $S=4$.

### Вариант №2

**1.** По кругу написано $2024$ положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму квадратов этих чисел

**Ответ:** 8096

**2.** Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $2x-7=\left[\lg\left(10^{2y}\cdot 3^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{-y}\cdot 3^{x}\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $\left(x;y\right)$ с наибольшим возможным значением $y$.

**Ответ:** $x=11,\ y=5$

**3.** На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $2+\frac{a}{2}$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{26}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ:** $S=1$

### Вариант №3

**1.** По кругу написано $50$ положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.

**Ответ:** $2^{50}$

**2.** Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $\left(x;y\right)$ с наибольшим возможным значением $x$.

**Ответ:** $x=-1,\ y=1$

**3.** На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+\frac{a}{3}$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ:** $S=16$

### Вариант №4

**1.** По кругу написано $25$ положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти квадрат суммы этих чисел.

**Ответ:** 2500

**2.** Пара целых чисел $x, y$ удовлетворяет уравнению $2x+1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 5^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{4y}\cdot 5^{x}\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа $a$ – наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Найти пару $\left(x;y\right)$ с наименьшим возможным значением $y$.

**Ответ:** $x=-3,\ y=1$

**3.** На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $4+\frac{a}{2}$, где $a$ – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{130}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ:** $S=9$

# Критерии проверки работ

**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 9 класс**

**Во всех задачах ответ без решения** – 0 б.

**Задача 1.**

обосновано только, что все числа в круге $\geq 2$ ( или $\leq 2$ ) **1**

обоснованы оба свойсва и сделан вывод, что все числа равны 2, но имеется небольшая погрешность в вычислении нужной суммы **2**

полностью обоснованное верное решение **3**

**Задача 2.**

только ответ, подбор **0**

верно найдено ОДЗ **1**

на основе свойств целых чисел и сложных функций получены целочисленные уравнения и выписаны их решения, но не найдена или найдена с ошибкой требуемая пара решений **2**

задача решена полностью обоснованно и верно **3**

**Задача 3.**

только чертеж (чертежи) **0**

чертежи с обоснованием, что ABCD – квадрат **1**

выражена и найдена сторона квадрата и площадь, но имеются небольшие вычислительные погрешности **2**

полностью обоснованное верное решение **3**