Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Юниор, математика, 9 класс, 6 апреля 2024

Вариант 1

1 Петя написал на доске все двузначные натуральные числа и напротив каждого из чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

2 Найти наибольшее нечетное число, не превосходящее 500, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 4, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{8}$.

Ответы и решения

Задача 1 Сумма S_1 произведений квадратов цифр всех двузначных чисел равна:

$$S_1 = \left(1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2\right)\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2\right).$$

Воспользуемся формулой: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$. Получим:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2=\frac{19\cdot 9\cdot 10}{6}=285.$$

Тогда $S_1 = 285^2 = 81225.$

Сумма S_2 всех двузначных чисел равна: $S_2 = 10+11+12+\ldots+98+99=109\cdot 45=4905.$

Сложив S_1 и S_2, получим результат Васи: $S_1+S_2=81225+4905=86130.$

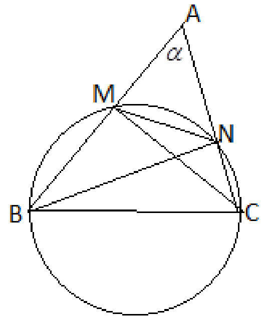
Ответ: 86130.

Задача 2. Пусть искомое число a имеет вид: $a=p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{r_m}$. Здесь $p_1, p_2,\ldots, p_m$ – простые делители, $r_1, r_2,\ldots, r_m$ – их кратности. Так как по условию число a нечетное, то среди простых делителей нет 2 Число делителей числа a равно

$$Q=(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)\ldots(r_m+1).$$

По условию число делителей нечетное. Из этого следует, все его скобки являются нечетными числами, поэтому числа $r_1, r_2,\ldots, r_m$ – четные. Тогда a является квадратом нечетного числа, меньшим 500. Наибольшее из таких чисел $a=21^2=441$.

Ответ: 441.



Задача 3. Заметим, что $BC=2R=8.$ Рассмотрим треугольники ANM и ABC. о Покажем, что они подобные. Во первых, они имеют общий угол $\angle BAC$ (обозначим его α). Во вторых, так как четырехугольник $\angle BMNC$ вписанный, то $\angle ABC=\angle MNA.$ Запишем коэффициент подобия:

$$k=\frac{AN}{AB}=\frac{AB\cos\alpha}{AB}=\cos\alpha=\frac{1}{8}.$$

Тогда $MN = BC \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1.$

Ответ: 1.

Вариант 2

1. Петя написал на доске все двузначные натуральные числа, в десятичной записи которых используются только четные цифры и ноль, а напротив каждого из этих чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 15480.

2. Найти наименьшее нечетное число, превосходящее 750, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 841.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 6, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{3}$.

Ответ: 4.

Вариант 3

1. Петя написал на доске все двузначные натуральные числа, в десятичной записи которых используются только нечетные цифры и ноль, а напротив каждого из этих чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 28850.

2. Найти наибольшее нечетное число, не превосходящее 1000, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 961.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 5, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{5}$.

Ответ: 2.

Вариант 4

1. Петя написал на доске все трехзначные натуральные числа и напротив каждого из чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 23643575.

2. Найти наименьшее нечетное число, превосходящее 1250, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 1369.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 8, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{2}$.

Ответ: 8.

Критерии проверки работ

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 9 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

1 б – Записал сумму квадратов произведений заданных чисел, но не смог ее вычислить или вычислил с ошибкой.

2б – Вычислил сумму квадратов произведений заданных чисел, но забыл добавить сумму самих чисел.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2

1 б- Записал формулы представления числа в виде произведений степеней простых чисел и числа делителей через эти степени.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3

1 б –Правильно построил чертёж, нашел равные углы и подобные треугольники.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

1. A. Делим на 9

1.1 Условие

В МИФИ происходят перестановки в расписании, отчего у вас попросили узнать следующее:

Допустим, у вас есть массив a длины n. Он состоит из целых положительных чисел. Вам необходимо определить, возможно ли переставить его элементы таким образом, чтобы произведение любых двух соседних элементов делилось нацело на 9.

1.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 2*10^5$). Вторая строка содержит n целых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^9$).

1.3 Вывод

Выведите Yes, если это возможно, и No в противном случае

1.4 Пример входных данных

Sample Input:

7

8 8 8 9 8 7 8

Sample Output:

No

Sample Input:

7

7 7 9 9 7 9 7

Sample Output:

Yes

1.5 Решение

Посчитаем, сколько в массиве чисел кратных 9 (числа первого типа), сколько кратных 3, но не кратных 9 (числа второго типа) и остальных чисел (третий тип).

Рассмотрим случай, когда нет чисел второго типа. Тогда достаточно поставить поочередно числа первого и третьего типа. Если нам хватает чисел первого типа для такой расстановки – ответ "Yes", иначе это невозможно.

Рассмотрим более сложный случай – у нас есть числа второго типа. Очевидно, что нам нет смысла специально ставить рядом числа первого типа или ставить рядом первый и второй тип. Но тогда числа кратные 3 (второго типа) должны идти друг за другом, иначе не будет выполняться условие задачи. Получается, что достаточно их поставить, например, в начало массива. После этого задача сводится к более простой, уже рассмотренной нами. Непосредственно в коде строить такой массив не нужно, достаточно проверить несколько условий. Решение за O(n).

```python
type1 = 0
type2 = 0
type3 = 0
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
for i in range(n):
    if a[i] % 9 == 0:
        type1 += 1
    elif a[i] % 3 == 0:
        type2 += 1
    else:
        type3 += 1
if type2 == 0:
    if n // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
else:
    if (n - type2 + 1) // 2 <= type1:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
```

2. B. Играем в игры

2.1 Условие

У мифиста есть n игр. В i-ой игре есть a[i] число сессий, которые он должен в нее отыграть. Пусть дано целое число b, определяющее, сколько удовольствия он получит. Тогда за время прохождения всех сессий i-ой игры его удовольствие изменится следующим образом:

1) За время первой сессии он получит b единиц удовлетворения;
2) За вторую b−1;
3) За третью b−2 и так далее, пока все сессии не будут отыграны.

Соответственно, после отыгрывания очередной сессии удовольствие мифиста может начать уменьшаться. Также он обязан отыграть все a[i] сессий.
Необходимо узнать, хватит ли сил мифисту, чтобы сдать сессию. Для этого обработайте q запросов вида: даны числа L и b. Найдите такое число R (L≤ R), что он отыграет все сессии в каждой игре от L до R включительно и получит наибольшее удовольствие. Обратите внимание, что ответ может быть очень большим, поэтому используйте подходящий целочисленных тип данных в вашем языке (long long в C++, Long в Java и тд).

2.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 5000$).

Вторая строка содержит n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^6$).

Третья строка содержит одно целое число q ($1 \le q \le 5000$).

Следующие q строк содержат по два целых числа L и b ($1 \le L \le n$, $1 \le b \le 10^6$) - описания каждого запроса.

2.3 Вывод

Выведите q целых чисел, по одному на каждой строке. i-я строка должна содержать лучшее значение R для i-ого запроса. Если существует несколько возможных ответов, выведите наименьший из них.

2.4 Пример входных данных

Sample Input:
8
1 3 8 1 1 6 3 3
4
1 1
1 2
1 3
4 1
Sample Output:
1
2
8
5

2.5 Решение

Рассмотрим 1 игровую сессию, где число b определяет уровень удовольствия и где в игру надо отыграть a сессий. Тогда получится, что мы получим по очереди b, b-1, …, b – a + 1 удовольствия. Это сумма арифметической прогрессии с разностью 1, первым элементом b – a + 1 и количеством элементов равным a. Тогда сумма такой прогрессии равна (b – a + 1 + b) * a / 2 = (2 * b * a – a * a + a) / 2. Рассмотрим обработку запроса. Нам достаточно идти указателем по массиву и поддерживать текущее удовольствие. Если при игре во все игры до текущей позиции включительно удовольствие стало строго больше предыдущего максимума, то это оптимальный ответ на данный момент. Так можно сделать, просто пройдясь по массиву для каждого запроса. Решение за O(n*q).

```
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
q = int(input())
while q:
    l, b = map(int, input().split())
    l -= 1
    su = 0
    ans = -1e18
    R = -1
    for i in range(l, n):
        su += (a[i] + 2 * a[i] * b - a[i] * a[i]) // 2
        if su > ans:
            R = i + 1
            ans = su
    print(R)
    q -= 1
```

3. C. Объедаемся пирожками

3.1 Условие

Сегодня у Владислава знаменательный день: он пишет финальный этап олимпиады “ЮНИОР”. В силу этого ему нужно хорошо подкрепиться пирожками.

Так как в МИФИ за последнее время открылось очень много кафетериев, теперь можно приобрести целых n видов пирожков. Влад хочет ими пообедать, поэтому Вы хотите ему в этом помочь.

Влад очень не любит k чисел. Он хочет купить какой-то непустой набор пирожков так, чтобы число пирожков в нем не было его нелюбимым. Но также Влад любит разнообразие, поэтому он не хочет покупать более 1 пирожка каждого вида.

Помогите ему найти число различных наборов пирожков, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Так как число способов может быть крайне большим, выведите ответ по модулю 1000000007.

Обратите внимание, что у Влада нелюбимых чисел не больше 20.

3.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит два целых числа n ($1 \le n \le 10^9$) и k ($1 \le k \le \min(n, 20)$).

Вторая строка содержит k целых нелюбимых различных чисел $a_1, a_2, ..., a_k$ ($1 \le a_i \le \min(n, 2*10^5)$), $a_i \ne a_j$ при $i \ne j$.

3.3 Вывод

Выведите число способов, которыми он может набрать себе пирожки на обед по модулю 1000000007.

3.4 Пример входных данных

Sample Input:
3 1
2
Sample Output:
4

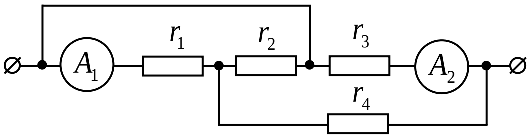
3.5 Решение

Заметим, что, если переформулировать условие, то нужно выбрать из n чисел от 1 до n любой набор из них, размер которого не является нелюбимым числом. Количество всех различных наборов размера x – это число сочетаний из n по x. Есть известная формула, что сумма всех сочетаний из n по 0, 1, 2, …, n равна 2^n. Это число можно быстро посчитать по данному модулю, применив бинарное возведение в степень. Нам нужны все сочетания из n по 1, …, n за исключением k из них. Получается, что ответом будет являться разность 2^n и сочетаний из n по 0, из n по a_1, из n по a_2 и тд. Эти ~20 сочетаний можно посчитать по обычной формуле сочетаний, так как $a_i \le 2*10^5$. Также нужно помнить, что все операции должны проводится по данному модулю. Решение за $O(\log(n)+k*\max(a_i))$.

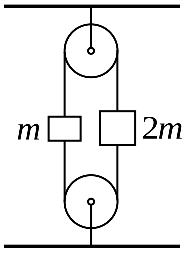
```python
m = 1000000007

def pw(a, b):
    ans = 1
    while b:
        if b % 2:
            ans = (ans * a) % m
        a = (a * a) % m
        b //= 2
    return ans

n, k = map(int, input().split())
a = list(map(int, input().split()))
ans = pw(2, n)
ans = m - 1 + ans
ans %= m
for i in range(k):
    s = 1
    s1 = 1
    for j in range(n - a[i] + 1, n + 1):
        s *= j
        s %= m
    for j in range(2, a[i] + 1):
        s1 *= j
        s1 %= m
    s1 = pw(s1, m - 2)
    s *= s1
    s %= m
    ans += m - s
    ans %= m
print(ans)
```

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2023-2024 учебного года, 9 класс
Олимпиада по физике

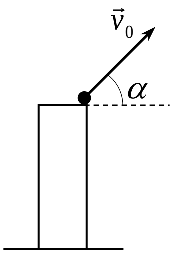
1. Электрическая цепь, схема которой дана на рисунке, содержит два идеальных амперметра и четыре одинаковых резистора $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$. Известно, что амперметр A_1 показывает силу тока $I_1 = 1$ А. Найти показания амперметра A_2.



2. Механическая система состоит из двух тела массой m и $2m$, двух невесомых блоков, невесомых и нерастяжимых веревок (см. рисунок). Известно, что в положении, показанном на рисунке, обе нити натянуты, причем сила натяжения нижней нити равна T. Найти ускорения тел и силу натяжения верхней нити.

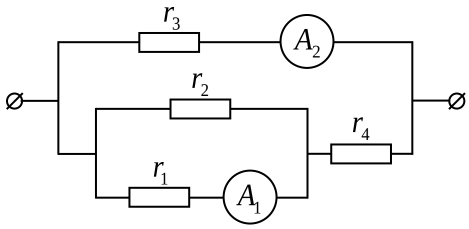


3. С верхушки очень высокой башни с одинаковой начальной скоростью v_0, под одинаковыми углами α к горизонту и в одной плоскости бросают два тела – сначала первое, а потом через интервал времени Δt - второе. Найти минимальное расстояние между телами в процессе движения обоих тел (т.е. когда оба тела уже будут двигаться). Через какое время после броска первого тела расстояние между телами будет минимально?



Решения и критерии оценивания

1. Перерисуем данную электрическую цепь, поменяв расположение резисторов и амперметров в пространстве (но не меняя их соединений друг с другом). Очевидно, данная в условии электрическая цепь может быть представлена в вид (см. рисунок). Сила тока, текущего через верхний участок цепи, состоящий из резистора r_3 и амперметра А2, равна



$$I_2 = \frac{U}{r_3} = \frac{U}{r}$$

где U - электрическое напряжение, приложенное к рассматриваемому участку цепи. Сопротивление нижнего участка цепи, состоящего из трех резисторов r_1, r_2, r_4 и амперметра А1, равно

$$\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r_3 = \frac{3}{2} r$$

Поэтому сила тока на нижнем участке цепи равна

$$I = \frac{2U}{3r}$$

Поскольку на участке параллельного соединения этот ток делится пополам, то через и амперметр А1 течет следующий электрический ток

$$I_1 = \frac{U}{3r}$$

Отсюда находим

$$I_2 = \frac{1}{3} I_1 = 0,33 \text{ А.}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильное использование закона Ома и правил сложения резисторов – 1 балл
2. Правильно нарисована эквивалентная схема цепи, на которой ясно виден характер соединения всех элементов – последовательно или параллельно – 1 балл
3. Правильно найден ток через амперметр А1 – 1 балл
4. Правильно найден ток через амперметр А2 – 1 балл
5. Получен правильный ответ для связи токов через амперметры – 1 балл
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

2. На тела действуют силы тяжести и силы натяжения веревок (нижней - T, верхней - T_1). Поэтому второй закон Ньютона дл тел имеет вид

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{T}_1$$
$$2m\vec{a}_2 = 2m\vec{g} + \vec{T} + \vec{T}_1$$

где $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ - ускорения тел. Поскольку большее тело будет опускаться вниз, то проекция этих законов на оси, направленную вниз для второго тела и вверх для первого, дает

$$ma_1 = T_1 - mg - T$$
$$2ma_2 = 2mg + T - T_1$$

Учитывая, что величины ускорений тел равны ($a_1 = a_2 = a$), н аходим из системы уравнений

$$a = \frac{1}{3}g$$

Подставляя это ускорение в любое из уравнений системы, получим

$$T_1 = T + \frac{4}{3}mg$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильно расставлены силы, действующие на тела системы – 1 балл
2. Правильные вторые законы Ньютона для тел системы – 1 балл
3. Правильные условия связи – одинаковость величин ускорений тел и их разное направление – 1 балл
4. Правильные ускорения тел системы – 1 балл
5. Правильная сила натяжения верхней нити – 1 балл
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Зависимости x-координат тел от времени $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будут одинаковыми (с задержкой для второго тела)

$$x_1(t) = v_0 \cos\alpha\, t \ \text{ (при } t > 0) \quad \text{ и } x_2(t) = v_0 \cos\alpha \left(t - \Delta t\right) \text{ (при } t > \Delta t)$$

Поэтому расстояние между телами по горизонтали

$$x_1(t) - x_2(t) = v_0 \cos\alpha\, \Delta t \qquad (*)$$

в процессе их движения меняться не будет, а будет оставаться все время одним и тем же (формула (*)). Следовательно, расстояние между телами

$$S = \sqrt{\left(x_1(t) - x_2(t)\right)^2 + \left(y_1(t) - y_2(t)\right)^2}$$

будет минимально, когда минимальным будет расстояние между ними по вертикали $\left|y_1(t) - y_2(t)\right|$. А здесь возможны варианты в зависимости от величины Δt. Если за время Δt первое тело не успело спуститься до того уровня, на котором оно находилось в момент броска (т.е. при $\Delta t < 2v_0 \sin\alpha / g$), то в какой-то момент времени y-координаты первого и второго тел совпадут. Тогда минимальным расстояние между ними будет именно в этот момент времени и равным расстоянию между ними по горизонтали

$$S_{\min} = x_1(t) - x_2(t) = v_0 \cos\alpha\, \Delta t\,.$$

Следовательно, оно будет достигнуто в такой момент времени t_1 когда совпадут y-координаты тел. Т.е. в такой момент времени t_1 после броска первого тела, когда будет выполнено условие:

$$v_0 \sin\alpha t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = v_0 \sin\alpha\left(t_1 - \Delta t\right) - \frac{g\left(t_1 - \Delta t\right)^2}{2}$$

Решая это уравнение относительно t_1, найдем, что

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \frac{\Delta t}{2}$$

Если же за время Δt первое тело успеет спуститься ниже своего начального уровня, то минимальное расстояние между телами будет достигаться в момент броска второго тела, т.е. через время Δt после бросания первого. И равно это расстояние будет величине

$$S_{\min} = \sqrt{\left(x_1(\Delta t) - x_2(\Delta t)\right)^2 + y_1^2(\Delta t)} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha\, \Delta t^2 + \left(v_0 \sin\alpha\, \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2}\right)^2}$$

Приводя в этом выражении подобные члены, получим

$$S_{\min} = \Delta t \sqrt{v_0^2 - v_0 \sin\alpha g \Delta t + \frac{g^2 \Delta t^2}{4}}$$

Собирая все вместе, получим ответ для минимального расстояния между телами в те моменты времени, когда будут двигаться оба тела

При $\Delta t < \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$ $S_{\min} = v_0 \cos\alpha\, \Delta t$ через время $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} + \dfrac{\Delta t}{2}$ после броска первого тела

При $\Delta t > \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$ $S_{\min} = \Delta t \sqrt{v_0^2 - v_0 \sin\alpha g \Delta t + \dfrac{g^2 \Delta t^2}{4}}$ через время Δt после броска первого тела

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильно использованы законы равноускоренного движения – 1 балл
2. Правильно найдено расстояние между телами в процессе движения при $\Delta t < 2 v_0 \sin\alpha / g$ – 1 балл
3. Правильно найдено время, через которое достигается минимальное расстояние между телами при $\Delta t < 2 v_0 \sin\alpha / g$ – 1 балл
4. Правильно найдено минимальное расстояние между телами при $\Delta t > 2 v_0 \sin\alpha / g$ – 1 балл
5. Правильно найдено время, через которое достигается минимальное расстояние между телами при $\Delta t > 2 v_0 \sin\alpha / g$ – 1 балл
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Юниор, математика, 9 класс, 6 апреля 2024

Вариант 1

1 Петя написал на доске все двузначные натуральные числа и напротив каждого из чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

2 Найти наибольшее нечетное число, не превосходящее 500, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 4, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{8}$.

Ответы и решения

Задача 1 Сумма S_1 произведений квадратов цифр всех двузначных чисел равна:

$$S_1 = \left(1^2+2^2+3^2+...+9^2\right)\cdot\left(1^2+2^2+3^2+...+9^2\right).$$

Воспользуемся формулой: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$. Получим:

$$1^2+2^2+3^2+...+9^2 = \frac{19\cdot 9\cdot 10}{6} = 285.$$

Тогда $S_1 = 285^2 = 81225.$

Сумма S_2 всех двузначных чисел равна: $S_2 = 10+11+12+...+98+99 = 109\cdot 45 = 4905.$

Сложив S_1 и S_2, получим результат Васи: $S_1+S_2 = 81225+4905 = 86130.$

Ответ: 86130.

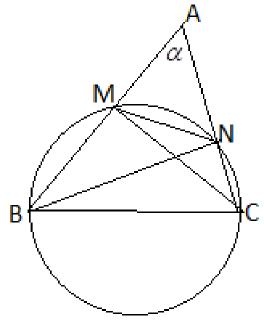
Задача 2. Пусть искомое число a имеет вид: $a = p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot...\cdot p_m^{r_m}$. Здесь $p_1, p_2, ..., p_m$ – простые делители, $r_1, r_2, ..., r_m$ – их кратности. Так как по условию число a нечетное, то среди простых делителей нет 2 Число делителей числа a равно

$$Q = (r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)...(r_m+1).$$

По условию число делителей нечетное. Из этого следует, все его скобки являются нечетными числами, поэтому числа $r_1, r_2, ..., r_m$ – четные. Тогда a является квадратом нечетного числа, меньшим 500. Наибольшее из таких чисел $a = 21^2 = 441.$

Ответ: 441.

Задача 3. Заметим, что $BC = 2R = 8.$ Рассмотрим треугольники ANM и ABC. о Покажем, что они подобные. Во первых, они имеют общий угол $\angle BAC$ (обозначим его α). Во вторых, так как четырехугольник $\angle BMNC$ вписанный, то $\angle ABC = \angle MNA.$ Запишем коэффициент подобия:



$$k = \frac{AN}{AB} = \frac{AB\cos\alpha}{AB} = \cos\alpha = \frac{1}{8}.$$

Тогда $MN = BC \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1.$

Ответ: 1.

Вариант 2

1. Петя написал на доске все двузначные натуральные числа, в десятичной записи которых используются только четные цифры и ноль, а напротив каждого из этих чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 15480.

2. Найти наименьшее нечетное число, превосходящее 750, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 841.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 6, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{3}$.

Ответ: 4.

Вариант 3

1. Петя написал на доске все двузначные натуральные числа, в десятичной записи которых используются только нечетные цифры и ноль, а напротив каждого из этих чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 28850.

2. Найти наибольшее нечетное число, не превосходящее 1000, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 961.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 5, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{5}$.

Ответ: 2.

Вариант 4

1. Петя написал на доске все трехзначные натуральные числа и напротив каждого из чисел – квадрат произведения его цифр. Вася быстро сложил все числа, написанные на доске. Какой результат получил Вася?

Ответ: 23643575.

2. Найти наименьшее нечетное число, превосходящее 1250, имеющее нечетное число делителей, включая 1 и самого числа.

Ответ: 1369.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 8, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если косинус угла при вершине A треугольника ABC равен $\frac{1}{2}$.

Ответ: 8.

Критерии проверки работ

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 9 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

1 б – Записал сумму квадратов произведений заданных чисел, но не смог ее вычислить или вычислил с ошибкой.

2б – Вычислил сумму квадратов произведений заданных чисел, но забыл добавить сумму самих чисел.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2

1 б- Записал формулы представления числа в виде произведений степеней простых чисел и числа делителей через эти степени.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3

1 б –Правильно построил чертёж, нашел равные углы и подобные треугольники.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.